TD 2
Propriétés du champ électrostatique

Applications du théorème de Gauss

Exercice 2.1

Utilisez le théorème de Gauss afin de trouver le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère creuse de rayon R et de densité de charge surfacique uniforme σ.

Exercice 2.2

Même question que l'Exercice 2.1, cette fois-ci pour une sphère pleine de rayon R et de densité de charge volumique uniforme ρ.

Exercice 2.3

Déterminez le champ électrique à une distance r perpendiculaire à un fil infiniment long et de densité de charge linéique uniforme λ. Comparez votre résultat à l'Exemple 1.2 donné dans le cours.

Exercice 2.4

Déterminez le champ électrique à l'intérieur d'une sphère de densité de charge *non*-uniforme $\rho(r) = kr$, avec k une constante et r la distance à l'origine de la sphère.

Exercice 2.5

Une couche sphérique de rayon interne a et de rayon externe b porte une densité de charge $\rho(r) = k/r^2$ pour $a \leqslant r \leqslant b$, avec k une constante [voir Fig. 1(a)]. Calculez le champ électrique dans les trois régions suivantes : (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$.

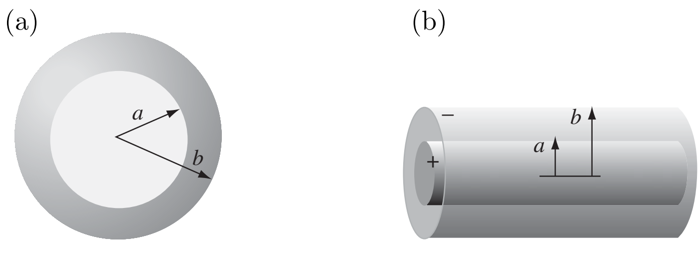

Figure 1

Exercice 2.6

Un long câble coaxial (de longueur supposée infinie) présente une densité de charge *volumique* uniforme ρ en son cylindre intérieur (rayon a), et une densité de charge *surfacique* uniforme σ sur sa couche cylindrique externe (rayon b). La charge surfacique est négative et telle que le câble tout entier soit électriquement neutre [voir Fig. 1(b)]. Déterminez le champ électrique dans les trois régions suivantes : (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$. Tracez $|\mathbf{E}|$ en fonction de r.

Exercice 2.7

Une plaque infinie d'épaisseur $2d$ a une densité de charge volumique uniforme ρ. Déterminez le champ électrique dans la direction perpendiculaire à la plaque [selon la direction y, où $y = 0$ se situe au milieu de la plaque, cf. Fig. 2(a)]. Tracez E en fonction de y.

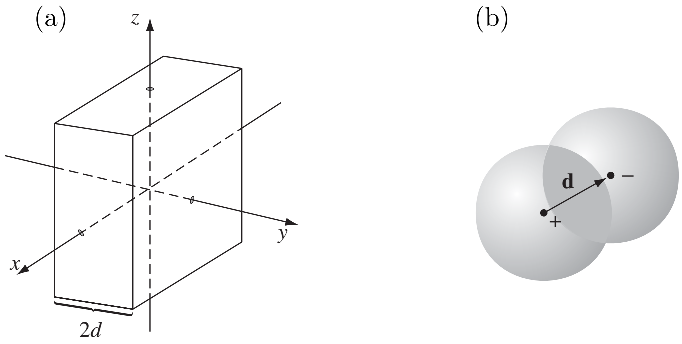

FIGURE 2

Exercice 2.8

Deux sphères de rayon R, l'une de densité de charge volumique uniforme $+\rho$, l'autre de densité $-\rho$, sont placées de telle sorte qu'elles se recouvrent partiellement. On appelle $\mathbf{d}$ le vecteur reliant les centres des deux sphères [voir Fig. 2(b)]. Déterminez le champ électrique dans la région où les deux sphères se recouvrent. *Indication :* utilisez votre réponse à l'Exercice 2.2.

Rappels et compléments d'analyse vectorielle

Exercice 2.9

Calculez le gradient des fonctions suivantes : (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$; (b) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$; (c) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \sin y \ln z$.

Exercice 2.10

Calculez la divergence des fonctions vectorielles suivantes : (a) $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$; (b) $\mathbf{v} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3zx\,\hat{\mathbf{z}}$; (c) $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$.

Divergence de E

Exercice 2.11

Supposons qu'en coordonnées sphériques, un champ électrique soit donné par $\mathbf{E} = kr^3\,\hat{\mathbf{r}}$, avec k une constante.

(a) Déterminez la densité de charge volumique ρ correspondante.

(b) Trouvez la charge totale contenue dans une sphère de rayon R centrée à l'origine. Effectuez le calcul de deux façons différentes.

Compléments d'analyse vectorielle (suite)

Exercice 2.12

Déterminez le rotationnel des champs de vecteurs de l'Exercice 2.10.