TD 3
Le potentiel électrique

Introduction du potentiel électrique

Exercice 3.1

Montrez que le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire $f = f(x, y, z)$ est toujours nul, *i.e.*, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

Exercice 3.2

L'un des deux champs vectoriels suivants ne peut pas être un champ électrostatique. Lequel ?

(a) $\mathbf{E} = k(xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}})$;

(b) $\mathbf{E} = k[y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}]$.

Ici, k est une constante.

Commentaires sur le potentiel électrique

Exercice 3.3

Déterminez le potentiel électrique V dans tout l'espace pour la configuration de l'Exercice 2.2. On prendra l'infini comme origine du potentiel. Calculez le gradient de V et vérifiez que votre réponse donne bien le champ électrique. Tracez $V(r)$ et le champ électrique correspondant.

Exercice 3.4

Déterminez le potentiel dans tous l'espace pour la configuration de l'Exercice 2.3. Vous ferez particulièrement attention au choix de l'origine du potentiel. Calculez le gradient de V et vérifiez que votre réponse donne bien le champ électrique. Tracez $V(r)$ et le champ électrique correspondant.

Exercice 3.5

Pour la configuration de l'Exercice 2.5, déterminez le potentiel au centre de la couche, en prenant l'infini comme origine du potentiel.

Exercice 3.6

Pour la configuration de l'Exercice 2.6, déterminez la différence de potentiel entre un point sur l'axe du câble ($r = 0$) et un point sur le cylindre externe ($r = b$).

Potentiel d'une distribution de charges localisées

Exercice 3.7

Par un calcul *direct* (sans passer par l'expression du champ $\mathbf{E}$), déterminez le potentiel électrique V à une distance z au-dessus des distributions de charges de la Fig. 1 : (a) deux charges ponctuelles de même signe $+q$; (b) un segment de longueur $2L$ chargé uniformément (densité linéique de charge λ) ; (c) un disque de rayon R chargé uniformément (densité surfacique de charge σ)

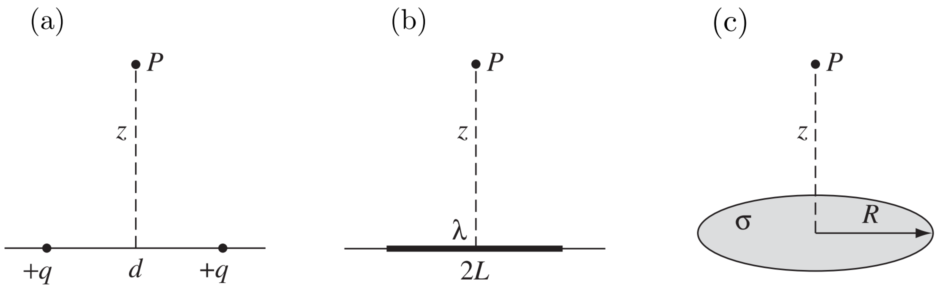

Figure 1

Dans chacun de ces trois cas, calculez $\mathbf{E} = -\nabla V$, et comparez aux résultats des Exemples 1.1, 1.2, et de l'Exercice 1.8.

On remplace à présent la charge ponctuelle $+q$ de droite dans la Fig. 1(a) par $-q$. Quel est alors le potentiel électrique en z ? Quel champ électrique cela suggèrerait naïvement ? Comparez votre réponse à celle de l'Exercice 1.4, et expliquez soigneusement quel est la source d'erreur.

Conditions aux bords en électrostatique

Exercice 3.8

Utilisez le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique $\mathbf{E}$ produit par un long cylindre creux (supposé de longueur infinie), de rayon R et de densité de charge surfacique uniforme σ. En déduire le potentiel électrique V associé. Vérifiez les relations de passage de $\mathbf{E}$ et V à l'interface formée par le cylindre.