Contrôle continu

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

On considère un cercle de rayon R et de densité linéique de charge λ uniforme. Le cercle se situe dans le plan xy et on place l'origine du repère cartésien au centre du cercle (voir Fig. 1).

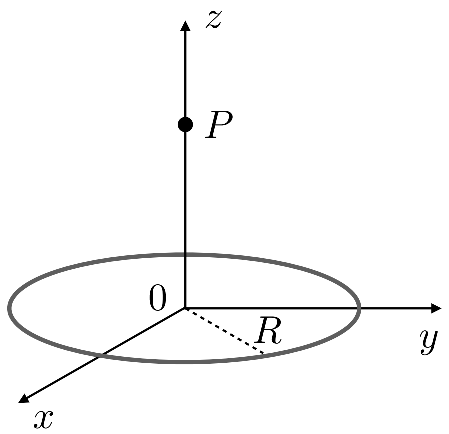

Figure 1

(a) Soit Q la charge totale portée par le cercle. Exprimez Q en fonction de λ et de R.

(b) Par un calcul direct, déterminez le potentiel électrique $V(P)$ en un point P situé le long de l'axe z, et de hauteur z. Vous exprimerez votre résultat en fonction de Q, R, et z.

(c) En déduire que le champ électrostatique $\mathbf{E}(P)$ au point P a pour expression

$$\mathbf{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

(d) Quel est le comportement asymptotique du module de $\mathbf{E}(P)$ lorsque $z \gg R$? Commentez brièvement votre résultat.

(t.s.v.p.)

Exercice 2

On considère une couche sphérique de rayon interne a et de rayon externe b, comme le montre la Fig. 2. Dans la suite on place l'origine du repère au centre géométrique de l'objet décrit ci-dessus, et on utilise les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, φ), pour lesquelles l'élément infinitésimal de volume s'écrit $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$. On suppose que le système porte une densité de charge volumique ρ uniforme pour $a \leqslant r \leqslant b$, et nulle sinon.

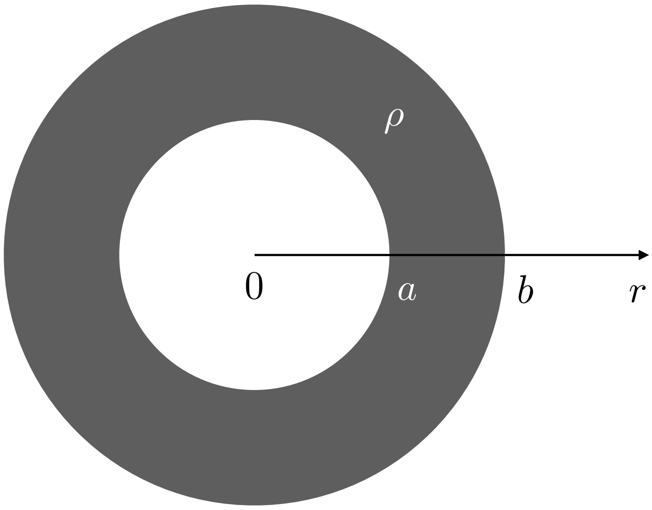

FIGURE 2

(a) Soit Q la charge totale de l'objet. Exprimez Q en fonction de a, b et ρ.

(b) En utilisant les symétries du système, argumentez brièvement que le champ électrostatique produit par l'objet s'exprime comme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$.

(c) Énoncez le plus précisément possible le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

(d) Calculez $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en tout point de l'espace. Vous exprimerez en particulier votre résultat en fonction de Q et non pas de ρ.

(e) Pour $a = 0$ (limite de la sphère pleine de rayon b uniformément chargée en volume), on donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{r}{b^3}\,\hat{\mathbf{r}}, & r \leqslant b, \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, & r > b. \end{cases} \tag{1}$$

Vérifiez que votre réponse à la Question (d) est compatible avec l'Eq. (1).

(f) Montrez que le potentiel électrique du système est donné (en prenant le zéro de potentiel à l'infini) par

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\, C, & r < a, \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b^3 - a^3} \left[\dfrac{1}{2}\left(r^2 - b^2\right) + a^3 \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b} \right) \right] \right\}, & a \leqslant r \leqslant b, \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r}, & r > b, \end{cases}$$

avec C une constante que vous exprimerez en fonction de a, b et Q.

(g) Pour $a = 0$, calculez par la méthode de votre choix l'énergie électrostatique W emmagasinée dans la distribution de charge.