Mécanique Analytique

L2 - Parcours Physique 2020-2021

Paul-Antoine Hervieux
Unistra/IPCMS

4) Equations canoniques

Equations canoniques

Pour obtenir les équations du mouvement à partir de $\{q_i\}$ et $\{\dot{q}_i\}$ on utilise le formalisme **lagrangien**.

Ce n'est pas **la seule façon** d'obtenir les équations du mouvement.

Il peut être avantageux d'utiliser $\{q_i\}$ et $\{p_i\}$

On doit alors chercher les nouvelles équations du mouvement

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

(EL) $\downarrow$

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i$$

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i$$

$$\rightarrow \quad d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$$

Equations canoniques

(1805 –1865)

La fonction de **Hamilton** (le hamiltonien) du système s'écrit:

$$\boxed{H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L}$$

$$\Rightarrow dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$$

$$\equiv \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

$$\boxed{\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right.}$$

Équations d'Hamilton

Equations canoniques

A cause de leur **simplicité** formelle et de leur **symétrie**, elles sont dites aussi **canoniques**

- **2*s*** équations différentielles du **premier** ordre
- **2*s*** fonctions inconnues {*p*} et {*q*}
- Elles remplacent les ***s*** équations du **deuxième** ordre de **Lagrange**

Legendre (1752-1834)

La transformation qui fait passer de $(q, \dot{q})$ à (q, p)

s'appelle la transformation de **Legendre**

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

En utilisant les équations de **Hamilton** on obtient $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

→ Si la fonction de **Hamilton** ne dépend pas explicitement du temps on a $\frac{dH}{dt} = 0$

$\Longleftrightarrow$ conservation de l'énergie

Equations canoniques

Poisson (1781-1840)

Crochets de **Poisson** (Fond. en MQ !!!)

Soit $f(p,q,t)$ on a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

En utilisant les équations de **Hamilton** on obtient

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}}$$

avec $\{H, f\} \equiv \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$

Crochet de **Poisson** pour *H* et *f*

Structure symplectique de la mécanique !!

- pour deux grandeurs quelconques *f* et *g* on a

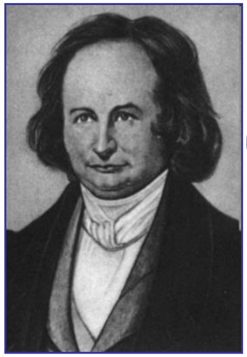
$$\boxed{\{f, g\}_{p,q} \equiv \{f, g\} \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}}$$

Equations canoniques

Propriétés:

$$
\begin{aligned}
\{f,g\} &= -\{g,f\} \\
\{f,c\} &= 0 \;\; \text{si } c = \;\; \text{constante} \\
\{f_1+f_2,g\} &= \{f_1,g\}+\{f_2,g\} \\
\{f_1 f_2,g\} &= f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\} \\
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\
\{q_i,q_k\} &= 0\;;\;\{p_i,p_k\}=0\;;\;\{p_i,q_k\}=\delta_{ik} \\
\{f,\{g,h\}\} &+ \{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0
\end{aligned}
$$

Jacobi



(1804-1851)

Relations de commutation canonique → fond. en MQ !

Identité de **Jacobi**

Equations canoniques

Théorème de Poisson: Si *f* et *g* sont deux intégrales premières, leurs crochets de Poisson est **aussi** une intégrale première.

$$\boxed{\Rightarrow \{f, g\} = \mathrm{cte} \quad \forall t}$$

Remarque: En appliquant le théorème de **Poisson**, nous n'obtiendrons <u>pas toujours de nouvelles intégrales premières</u> puisque leur nombre est généralement limité.

$$\longrightarrow \quad \{f, g\} = c$$ rien de nouveau

$$\longrightarrow \quad \{f, g\} = F(f, g)$$ rien de nouveau

Equations canoniques

Transformations canoniques

Le choix des coordonnées généralisées *q* n'est limité par aucune condition: on peut prendre *s* grandeurs quelconques définissant de façon univoque la position du système dans l'espace.

→ Les équations de **Lagrange** <u>sont invariantes</u> par rapport à la transformation
$Q_i = Q_i\,(q,t)$ – *transformations ponctuelles* -

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow L'(Q, \dot{Q}, t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = 0}$$

Ex: passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \varphi)$$

Equations canoniques

- Cette transformation laisse aussi invariante la forme des équations de **Hamilton**

- Pourtant, il existe une classe **beaucoup plus large** de transformations qui laisse invariante la forme des équations de **Hamilton**. Ceci est dû au fait que les impulsions ***p*** jouent le rôle de variables indépendantes au même titre que les coordonnées ***q***.

$$Q_i = Q_i\,(p,q,t)\ ,\ P_i = P_i\,(p,q,t)$$

$$H(q,p,t) \longrightarrow H'(Q,P,t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \longrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}\ ,\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

Ces transformations sont dites **canoniques**

$$\delta \int L dt = \delta \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) = 0 \longrightarrow \delta \int \left(\sum_i P_i dQ_i - H' dt\right) = 0$$

Principe de moindre action

$$\boxed{\Rightarrow \sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF}$$

Equations canoniques

Toute transformation **canonique** est caractérisée par sa fonction ***F*** qu'on appelle **fonction génératrice** de la transformation.

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H)dt$$

$$\longrightarrow p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \; ; \; P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \; ; \; H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Pour une fonction $\boldsymbol{F(Q,q)=F_1}$ donnée ces formules donnent

$$(p,q) \rightarrow (P,Q)$$

On peut aussi écrire la fonction génératrice sous **trois autres formes**

	q	p	Q	P
$F_1(Q,q)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(P,q)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(Q,p)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(P,p)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P}$	

$\boxed{F_2(P,q),\ F_3(Q,p) \text{ et } F_4(P,p)}$

On a toujours

$$H' = H + \frac{\partial F_k}{\partial t} \quad \text{avec} \quad k = 1, \ldots, 4$$

Equations canoniques

Une transformation **particulière**: $Q_i = p_i$ et $P_i = -q_i$

$F \equiv F_1(q, Q, t) = \sum_i q_i Q_i$ (Inter changer les noms des coordonnées et des vitesses)

Théorème: Une transformation (p,q) → (P,Q) qui préserve les crochets de **Poisson** est une transformation **canonique**

$$\boxed{\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}}$$

A partir de $\{q_i\,, q_k\} = 0\ ,\ \{p_i\,, p_k\} = 0\ ,\ \{p_i\,, q_k\} = \delta_{ik}$

et du théorème ci-dessus on déduit

$$\boxed{\{Q_i\,, Q_k\}_{p,q} = 0\ ,\ \{P_i\,, P_k\}_{p,q} = 0\ ,\ \{P_i\,, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}}$$

→ Pour que la transformation soit **canonique** les variables P et Q doivent satisfaire ces relations.

Rq: ces relations jouent un rôle fondamental en mécanique quantique !

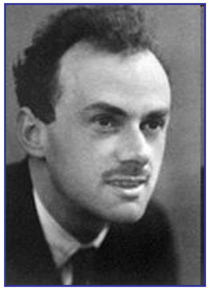
$$\boxed{[\hat{q}_i\,, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{ik}}$$

$q_i \longrightarrow \hat{q}_i$ (opérateur); { } → [ ] (commutateur);

$\hbar$ constante de **Planck**

Equations canoniques

La variation des grandeurs (*p*,*q*) lors du mouvement lui-même peut-être considérée comme une transformation **canonique**.



$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau) \ , \ p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau)$$

La fonction **génératrice** est égale à -***S***

→ Intégrale de chemin, **Dirac**, **Feynman**

Définition:
On nomme grandeurs **canoniquement conjuguées *q*** et ***p*** deux grandeurs physiques telles que {*p*,*q*} = 1.

Ex: $\{M_z, \varphi\} = 1$ Les variables dynamiques s'associent en couple !!!

Equations canoniques

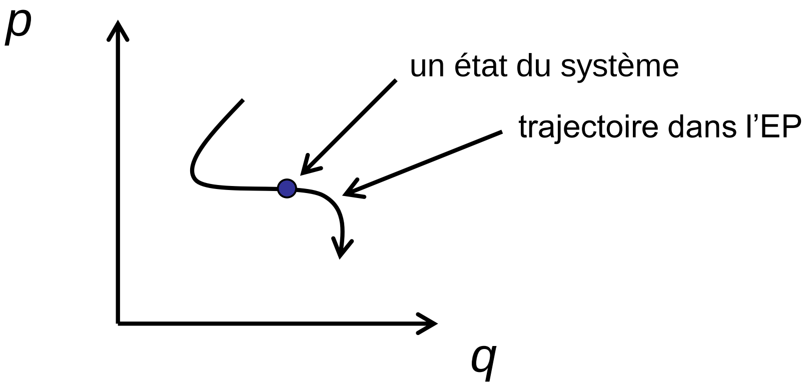
(1809-1882)

Théorème de **Liouville**

Interprétation géométrique des phénomènes mécaniques

→ **ESPACE DES PHASES (EP)**

Espace de dimension **2*s*** (essentiel en mécanique statistique)



Rq: l'espace de configuration a pour dimension ***s***

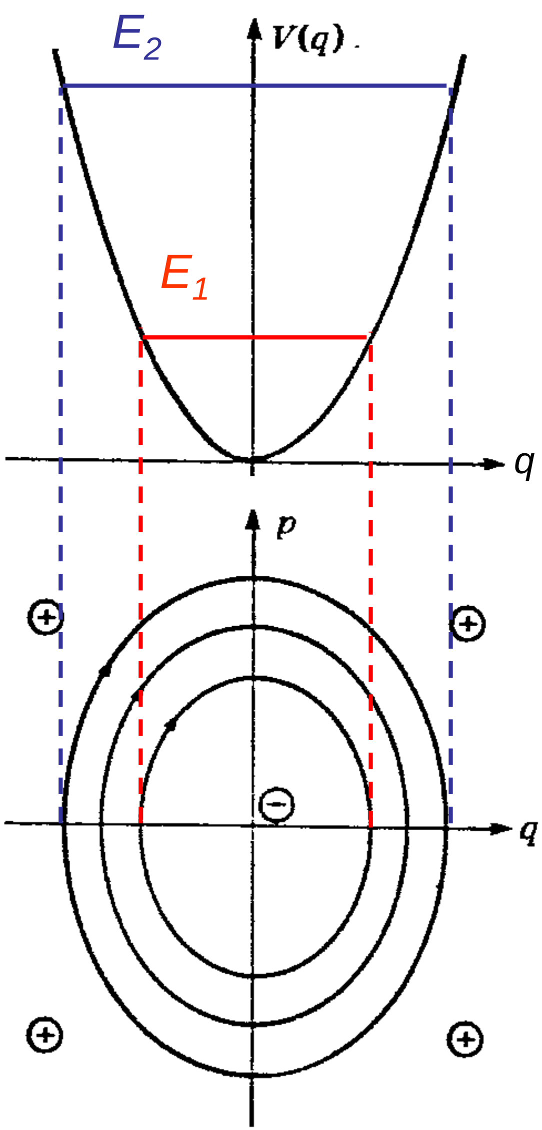
Equations canoniques

Oscillateur harmonique à 1D

s = 1

→ EP a 2 dimensions

$$\boxed{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = H(p,q) = E}$$

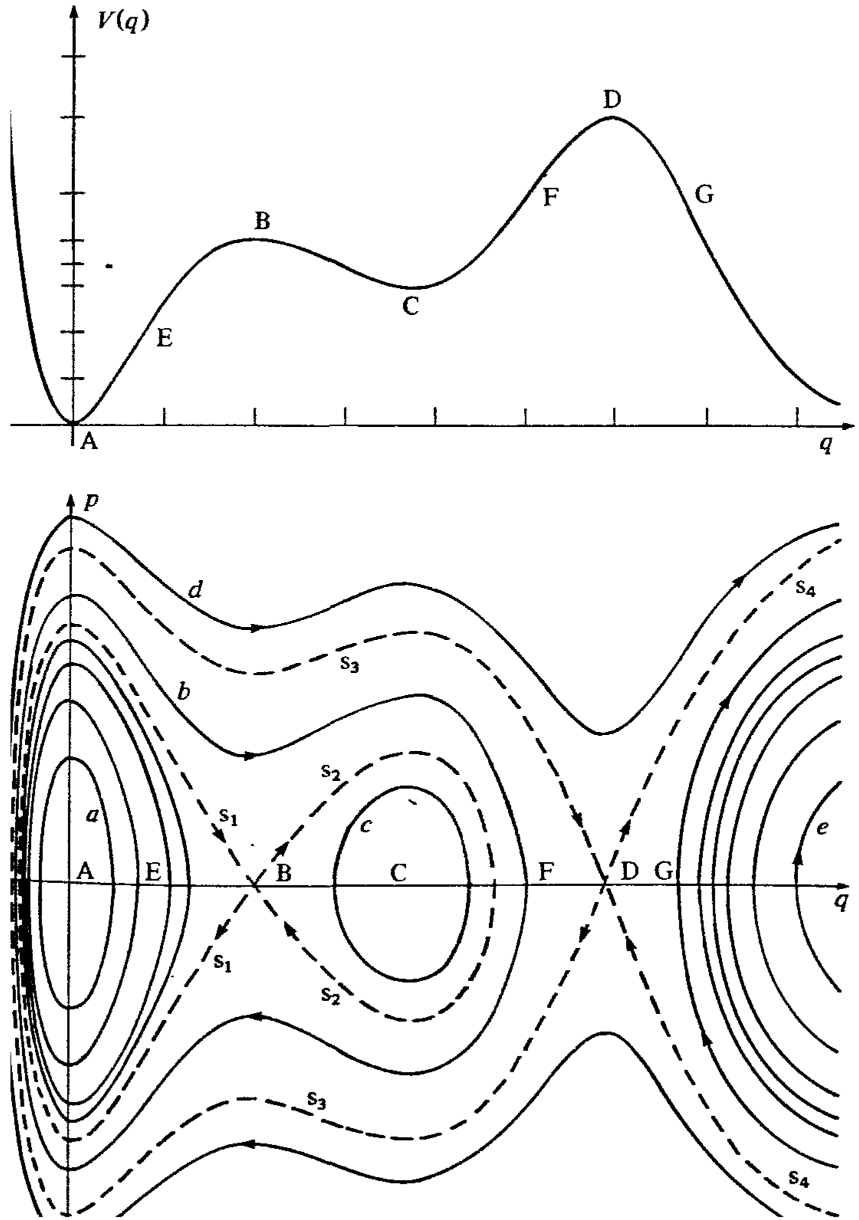


Equations canoniques

Energie potentielle plus compliquée !

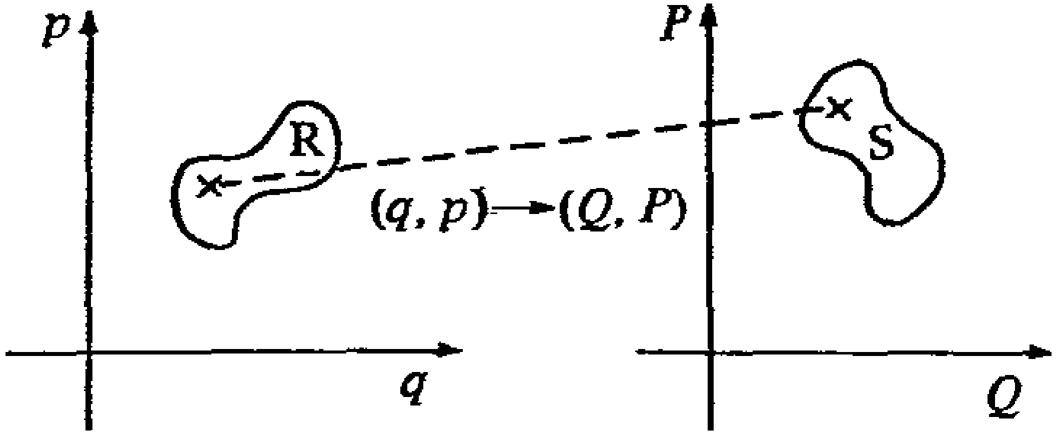
↓

Cf. *Systèmes dynamiques*



Equations canoniques

$\boxed{(p,q) \rightarrow (P,Q)}$



$$A_R = \int \dots \int_R \Pi_{i=1}^{s} dq_i \Pi_{i=1}^{s} dp_i \; ; \; A_S = \int \dots \int_S \Pi_{i=1}^{s} dQ_i \Pi_{i=1}^{s} dP_i$$

Si on transforme **canoniquement** les variables (*p*,*q)* en (*P*,*Q)*, les **volumes** des régions *p*,*q* et *P*,*Q* qui se correspondent seront les **mêmes**.

On sait que:

$$\int \dots \int_S \Pi_{i=1}^{s} dQ_i \Pi_{i=1}^{s} dP_i = \int \dots \int_R \boxed{D} \, \Pi_{i=1}^{s} dq_i \Pi_{i=1}^{s} dp_i$$

$$\boxed{D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}}$$

jacobien de la transformation

Equations canoniques

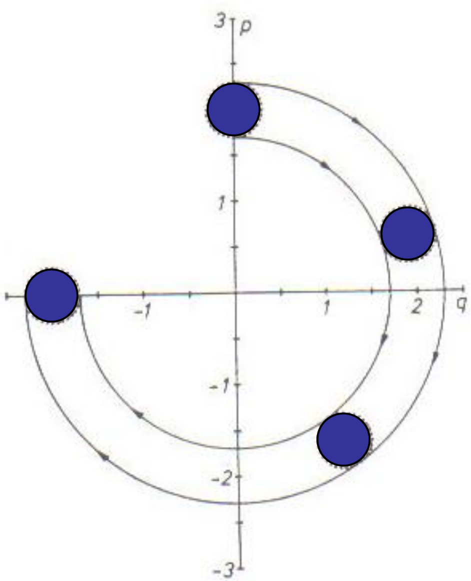
Démonstration simple:

1D: (p,q) → (P,Q) → $D = |J|$ avec $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow D = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \equiv \{P, Q\}_{p,q} = 1$$

On a vu que l'évolution temporelle est une transformation **canonique**

→ Le volume de l'espace des phases reste inchangé lors de l'évolution **hamiltonienne** du système.



C'est le théorème de **Liouville**