Mécanique Analytique

L2 - Parcours Physique 2020-2021

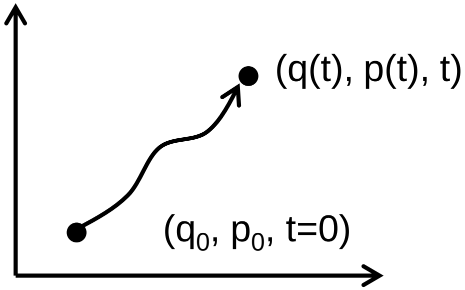
Paul-Antoine Hervieux
Unistra/IPCMS

5) Hamilton-Jacobi / Action-Angle

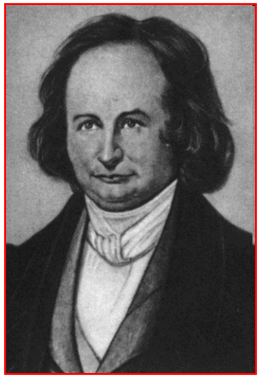
Hamilton-Jacobi

(1805 –1865)

On va utiliser l'<u>action</u> comme <u>grandeur physique</u>



$\boxed{S}$



(1804 –1851)

- Il existe une transformation canonique (TC) qui permet de passer de $\underbrace{(q(t), p(t),}_{2s}$ t) à (q_0, p_0, t=0) qui sont des constantes !

$$\begin{cases} q = q(q_0, p_0, t) \\ p = p(q_0, p_0, t) \end{cases}$$

- On peut essayer de trouver une **TC** telle que $H'(Q, P, t) = 0$

Hamilton-Jacobi

$$H'(Q,P,t) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}_i \equiv \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i \equiv -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \end{cases}$$

Si $H' = 0$ alors F est solution de $\boxed{H(q,p,t) + \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0.}$

- Il est plus facile de chercher une fonction génératrice de la TC du type F_2

→ $F(q,P,t) = F_2$

	q	p	Q	P
$F_1(Q,q)$		$\dfrac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\dfrac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(P,q)$		$\dfrac{\partial F_2}{\partial q}$	$\dfrac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(Q,p)$	$-\dfrac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\dfrac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(P,p)$	$-\dfrac{\partial F_4}{\partial p}$		$\dfrac{\partial F_4}{\partial P}$	

$$\boxed{p = \frac{\partial F_2}{\partial q}}$$

Hamilton-Jacobi

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

- C'est l'équation de **Hamilton-Jacobi** (EHJ).

- C'est une *équation aux dérivées partielles* (EDP) du premier ordre des (s+1) variables (q_1,…, q_s, t) de la fonction F_2.

- F_2 est appelée *fonction principale de Hamilton* et elle est notée $\boldsymbol{S}$.

- On note que F_2 n'apparaît pas explicitement dans l'EHJ → F_2 + cte est aussi une solution de l'EHJ. Cette *constante additive* peut-être arbitrairement choisie.

- Comme $\dot{P}_i = 0$ les P_i sont constants $\Rightarrow \boxed{P_i = \alpha_i.}$

- La fonction F_2 (ou S) est une fonction des (s+1) *variables* (q_1,…, q_s, t) et des s constantes (paramètres) (α_1,…, α_s). $\boxed{\rightarrow S(q,\alpha,t)}$

Hamilton-Jacobi

Comme S est du type F_2 on a $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ et $Q_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i} \overset{(*)}{=} \text{constante} \equiv \beta_i$

Si on suppose que (*) est inversible c'est-à-dire que $\det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q_l}\right) \neq 0$

alors

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \\ p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \end{cases}}$$

En principe les équations du mouvement sont ici obtenues.

-La lettre S pour désigner la transformation canonique F_2 qui transforme les variables Q_i et P_i en constantes n'a pas été choisie au hasard. En effet:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\underbrace{\cancel{\dot{\alpha}_i}}_{=0}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad ; \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \equiv L} \quad ; \quad H = -\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Hamilton-Jacobi

→ La fonction principale de **Hamilton** est donnée par:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt}$$

Attention:

- pour calculer *S* il faut connaître les équations du mouvement $q(t), \dot{q}(t)$

- Si *H* ne dépend pas explicitement du temps alors

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

- On peut faire l'hypothèse $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$

$$\Rightarrow \boxed{H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1}$$

- Cette équation ne contient plus le temps.

- Une des constantes d'intégration (intégrale première) dans *S* est égale à *H*(=*E*).

Hamilton-Jacobi

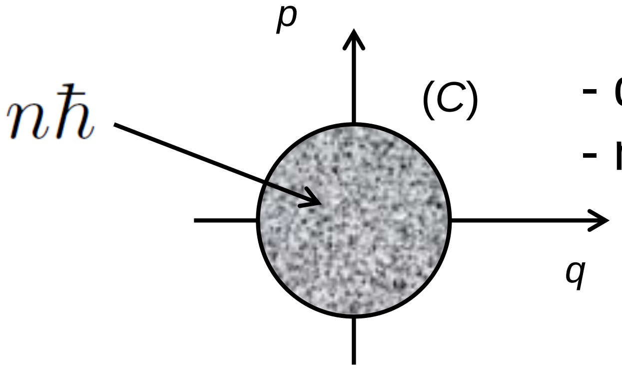
- ***W*** est connue sous le nom de <u>*fonction caractéristique de Hamilton*</u>
(ou action réduite)

1-forme différentielle !

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \cancel{\dot{\alpha}_i} \right) = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \Rightarrow \boxed{W = \int p_i \dot{q}_i dt = \int p_i dq_i}$$

$$\oint p dq = n\hbar$$



- début de la mécanique quantique
- modèle de **Bohr** avec la quantification de l'action

1913 (il y a un peu plus de 100 ans !!!)

Hamilton-Jacobi

Séparation des variables

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad ; \quad S(q_i, \alpha_i, t)$$

Admettons que l'EHJ puisse s'écrire comme:

$$\boxed{\Phi\left\{q_{i,1}, t, \frac{\partial S}{\partial q_{i,1}}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0}$$

$q_{i,1}$ désigne l'ensemble des coordonnées sauf q_1

On cherche une solution de la forme $\boxed{S = S'(q_{i,1}, t) + S_1(q_1)}$

dérivée droite

$$\Rightarrow \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \gamma_1$$ (constante)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Phi\left\{q_{i,1}, t, \frac{\partial S'}{\partial q_{i,1}}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \gamma_1\right\} = 0}$$

Hamilton-Jacobi

Séparation des variables

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \gamma_1$$

C'est une <u>équation différentielle ordinaire</u> d'où on peut tirer $S_1(q_1)$.

On peut <u>*a priori*</u> séparer successivement les *s* coordonnées et le temps et la solution complète de l'EHJ se ramène à des quadratures (<u>écriture explicite des solutions</u>).

Variable cyclique: cette coordonnée n'entre jamais sous forme explicite dans la fonction de Hamilton et par conséquent dans l'EHJ.

$$\varphi\left(\cancel{q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial S}{\partial q_1} \Rightarrow \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \gamma_1 \Rightarrow \boxed{S_1(q_1) = \gamma_1 q_1}$$

$$\boxed{\Rightarrow S = S'(q_{i,1}, t) + \gamma_1 q_1}$$

Hamilton-Jacobi

Séparation des variables

La constante γ_1 n'est rien d'autre que la valeur constante de l'impulsion correspondant à la coordonnée cyclique.

$$\boxed{p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}}$$

Notons que la séparation du temps pour un système conservatif correspond également à la méthode de séparation avec ***t*** pour variable cyclique.

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S'(q_i, \alpha_i) + \gamma_1 t$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial t} = -H = -E$$

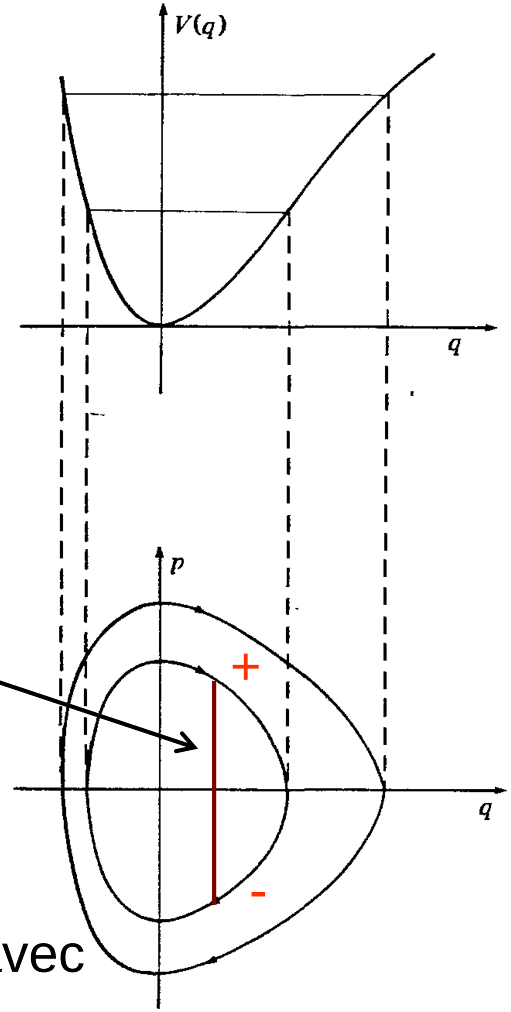
$$\boxed{\Rightarrow S(q_i, \alpha_i, t) = S'(q_i, \alpha_i) - Et}$$

$$W(q_i, \alpha_i)$$

Action-Angle

Ce sont les variables (conjuguées canoniquement) les plus simples et les plus profondes de la mécanique analytique.

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$



Dans la représentation (*q*,*p*) une courbe de l'EP d'énergie *E* est représentée par une fonction bivaluée:

$$p(q,E) = \pm[2m(E - V(q)]^{1/2}$$

Le fait que cette fonction soit multivaluée n'est pas satisfaisant.

On cherche une nouvelle paire de variables **(θ,*I*)** avec les propriétés suivantes:

Action-Angle

• Chaque courbe de phase est caractérisée par une valeur unique de ***I*** qui est constante le long d'une courbe
• Chaque point de la courbe de phase est défini par une fonction univaluée de $\boldsymbol{\theta}$

- On passe de (q,p) à (θ,I) par une transformation canonique
- On se restreint au cas des TC indépendantes du temps → $H'=H$

- Les nouvelles équations de Hamilton sont:

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} \quad ; \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0}$$

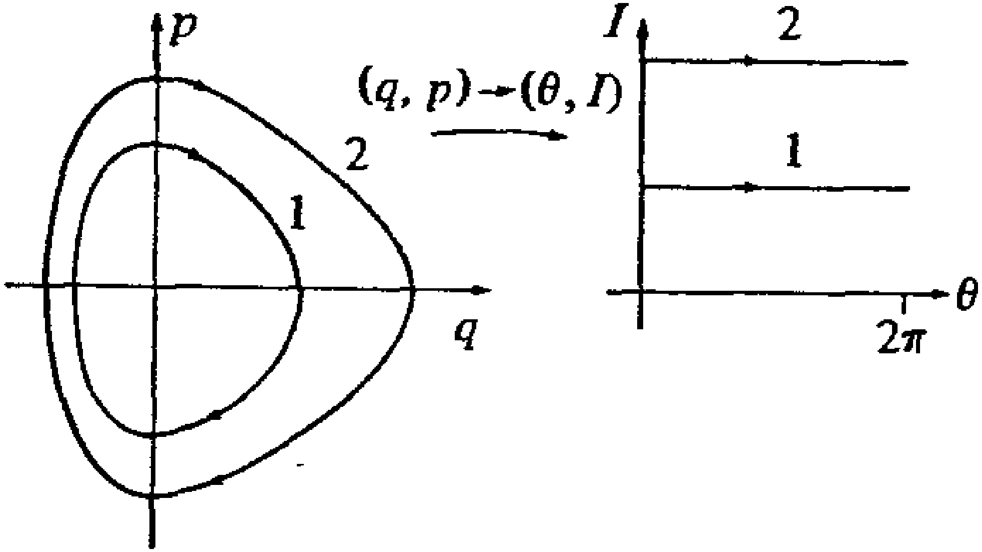
par définition de I

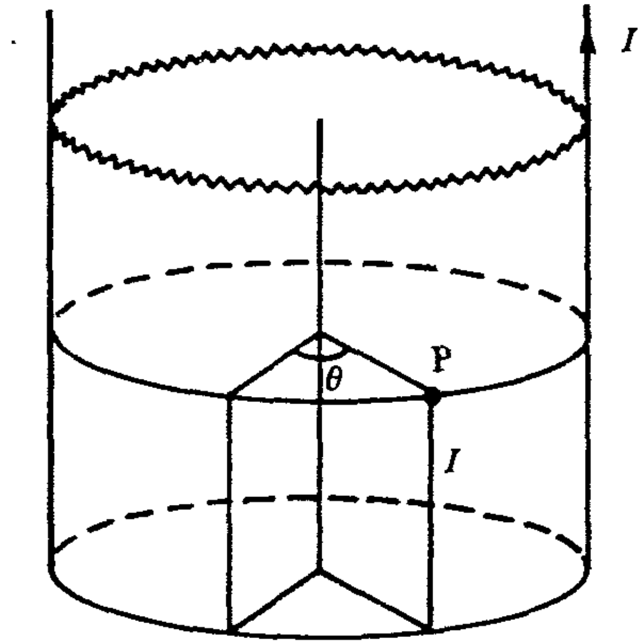
$\longrightarrow$ Le nouvel hamiltonien ne dépend pas de θ

$\longrightarrow$ Comme $\boxed{I = \text{const}, \ \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH(I)}{dI} \equiv \omega(I) = \text{const}}$

$$\longrightarrow \quad \dot{\theta} = const \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega(I)t + \delta} \ \text{avec } \omega(I) = \frac{dH}{dI}$$

Action-Angle





$$
\begin{aligned}
q(\theta + 2\pi, I) &= q(\theta, I) \\
p(\theta + 2\pi, I) &= p(\theta, I)
\end{aligned}
$$

Action-Angle

Exemple: l'oscillateur harmonique

$$q = \left(\frac{2I}{m\omega}\right)^{1/2} \sin\theta,\ p = (2Im\omega)^{1/2} \cos\theta$$ TC

$$H(q,p) = p^2/2m + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$\downarrow$$

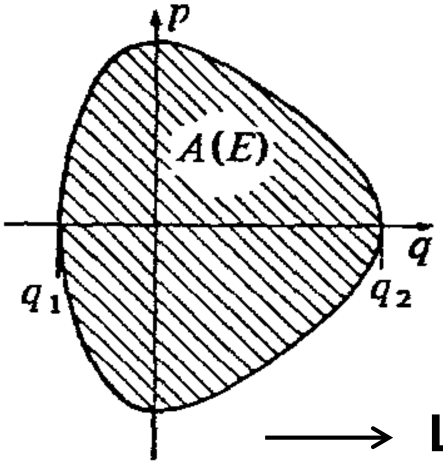
$$H(I) = \omega I$$

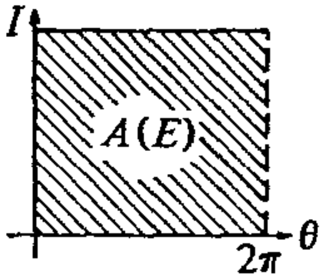
Action-Angle

$$A(E) = \oint \mathrm{d}q\, p(q, E)$$

$$= 2 \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q\, [2m(E - V(q))]^{\frac{1}{2}}$$

$$A(E) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, I = 2\pi I.$$





→ **Liouville**

L'action ***I*** est proportionnelle à l'aire

Action-Angle

Fonctions génératrices

$S_2 = F_2$

$$(q, p) \longrightarrow (\theta, I)$$

$$S_2(I, q), = \int_0^q \mathrm{d}q\, p(q, I)$$

$$\theta = \frac{\partial S_2}{\partial I}(I, q)$$

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(I, q)$$

$$\Delta S_2(I) = \oint \mathrm{d}q\, \frac{\partial S_2}{\partial q}$$

$$\boxed{= \oint \mathrm{d}q\, p = 2\pi I.}$$

	q	p	Q	P
$F_1(Q, q)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(P, q)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(Q, p)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(P, p)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P}$	

$\longrightarrow$ Après <u>une période</u> S_2 augmente de $2\pi I$

Action-Angle

Fonctions génératrices

$S_1 = F_1$

$$(q, p) \longrightarrow (\theta, I)$$

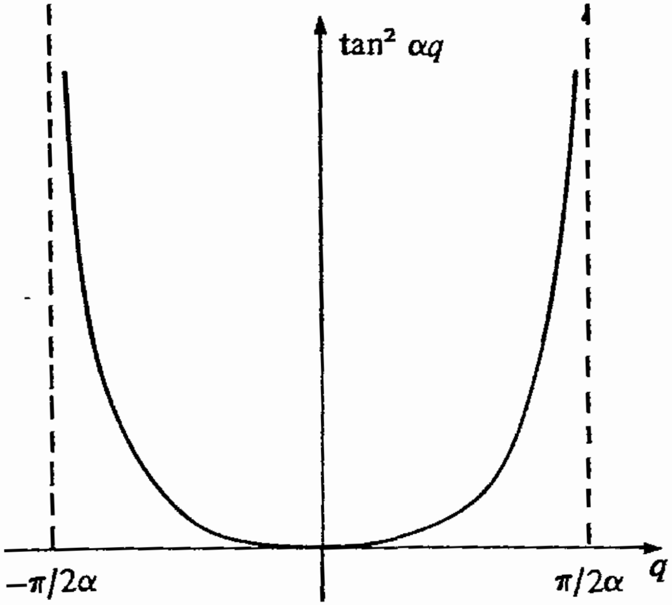
$$S_1(\theta, q) = S_2(I, q) - \theta I,$$

	q	p	Q	P
$F_1(Q, q)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(P, q)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(Q, p)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(P, p)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P}$	

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S_1 &= \Delta S_2 - \Delta(I\theta) \\ &= \Delta S_2 - I\Delta\theta = 0. \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ S_1 est une fonction périodique en θ.

Action-Angle



$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$V(q) = U\tan^2(\alpha q)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &H(\theta, I) = \alpha I[\alpha I + 2(2mU)^{1/2}]/2m \\ &\omega \equiv \partial H/\partial I = \alpha[2(E+U)/m]^{1/2} \end{aligned}}$$