

Université de Strasbourg

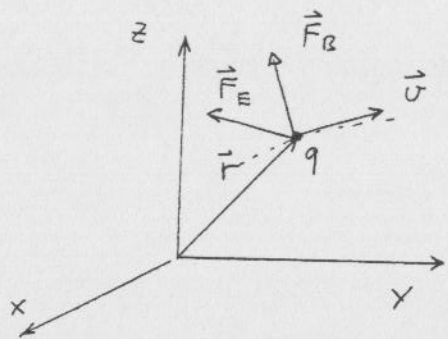


ELECTROMAGNETISME

Licence de Physique II

Prof. J.P. Bucher

FORCES ELECTROMAGNETIQUE



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Observations:

- 1) Pour q au repos dans le référentiel considéré ($\vec{v} = 0$), il $\exists$ une force $\vec{F}_E \sim q$

$$\vec{F}_E = \vec{F}_E(\vec{r}, t) = q \vec{E}(\vec{r}, t)$$

- 2) Lorsque $\vec{v} \neq 0$ il faut ajouter à $\vec{F}_E$ une autre force $\vec{F}_B \sim q$. Les expériences d'Ampère et de Faraday montrent que $\vec{F}_B \perp \vec{v}$
 $\vec{F}_B \cdot \vec{v} = 0$ est compatible avec

$$\boxed{\vec{F}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)}$$
 constitue la déf. du vecteur $\vec{B}$

Par un choix convenable de $\vec{v}$, la mesure de $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$ permet de déterminer partout les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

découplage | Il est possible de faire abstraction de la charge qui a servi à définir $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en considérant que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ existent à chaque instant et en tout point de l'espace indépendamment du fait que l'on cherche à les mesurer

On postule l'existence de grandeurs physiques observables

{	$\vec{E}$: champ électrique
	$\vec{B}$: champ d'induction magnétique

En théorie classique (pas de spin), la force EM est donnée par l'equ. de Laplace-Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]}$$
 ♡

scalaire : propriété de la particule

Remarquable! L'action sur une particule de toutes les forces contenues dans l'espace peut être représentée par deux champs vectoriels seulement.

Considérations d'unités

$$F = q v B \rightarrow [B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = T \leftarrow \text{Tesla}$$

Déf: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide
 $\vec{H}$: champ magnétique

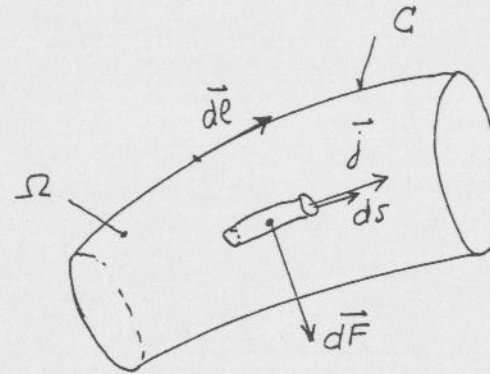
$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{v_L^2} \quad [\epsilon_0] = \frac{C^2}{N m^2}$$

$$[\mu_0] = \frac{N m^2}{C^2} \cdot \frac{s^2}{m^2} = \frac{kg \cdot m}{C^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{m \cdot kg}{C^2}$$

Force magnétique sur un conducteur filiforme

parcouru par un courant



Pour un élément $d\vec{\ell}$
de tube de courant

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B} \quad dq = \rho d\tau$$

$$\rightarrow d\vec{F} = \rho \vec{v} \wedge \vec{B} d\tau$$

$$d\vec{F} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$$

$$\vec{F} = \iiint_{\Omega} \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

l'élément de volume $d\tau = d\vec{s} \cdot d\vec{\ell}$

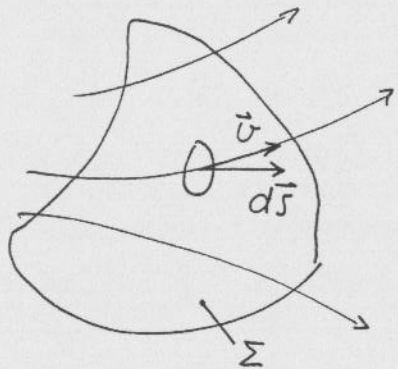
$$\Rightarrow d\vec{F} = (\vec{j} \cdot d\vec{s}) d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \int_C d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit$$

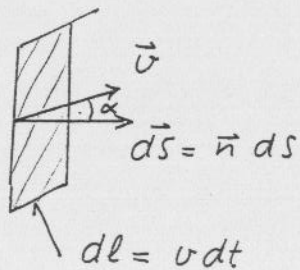
FLUX A TRAVERS UNE SURFACE

Loi d'Ohm

Quel est le débit de charge à travers une surface ?



par la tranche



Charge ayant traversé l'élément ds pendant dt :

$$dq = \rho ds \cdot dl \cos \alpha = \rho ds v dt \cos \alpha$$

le vecteur densité de courant est donné par :

$$|\vec{j}| = \frac{dq}{ds dt} = \rho v \cos \alpha \left[\frac{As}{s m^2} \right] = \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

lorsque $I \neq I(t) \rightarrow$ courant stationnaire

Application : fil de cuivre $j = 10 \frac{A}{mm^2}$

1 él libre par atome $n \approx 10^{23} \frac{el}{cm^3}$; $\rho = ne$

$$\rightarrow v \approx 6 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$$

vitesse instantanée $10^6 \frac{m}{s}$ (agitation aléatoire dont la moyenne est nulle).

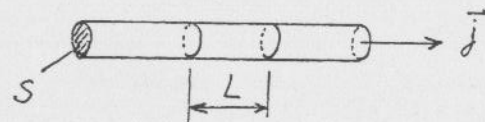
Parenthèse : l'expérience montre qu'un courant stationnaire ne peut se maintenir que si un champ $\vec{E}$ constant existe

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

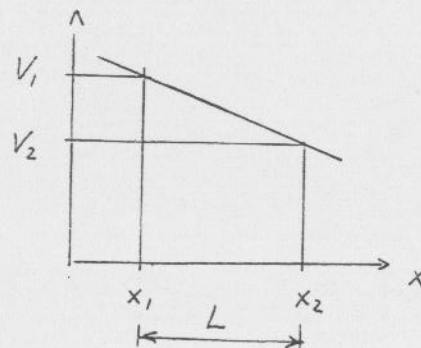
σ : conductivité

$$\vec{j} = -\sigma \vec{\text{grad}} V$$

Loi d'Ohm sous forme génér



$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = -\sigma \vec{S} \cdot \vec{\text{grad}} V = -\sigma S \frac{\partial V}{\partial x}$$



$$I = -\sigma S \frac{V_2 - V_1}{L}$$

$$I = \sigma S \frac{(V_1 - V_2)}{L} = \frac{\sigma S}{L} V$$

V : ddp entre x_1 et x_2

$$I = \frac{1}{R} \cdot V$$

avec $R = \frac{L}{\sigma S}$; $\frac{1}{\sigma} = \rho$: résistivité

Equation de continuité

Considérons maintenant un volume Ω limité par une surface fermée Σ et écrivons la conservation de la charge contenue dans Σ

$$q = \int_{\Omega} \rho \, d\tau$$

la vitesse de variation de q dans Σ est

$$\frac{dq}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

avec $\rho = \rho(\vec{r}, t)$

on satisfait au principe de conservation de la charge en écrivant le bilan :

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = 0$$

En utilisant le TH de la div. il vient

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

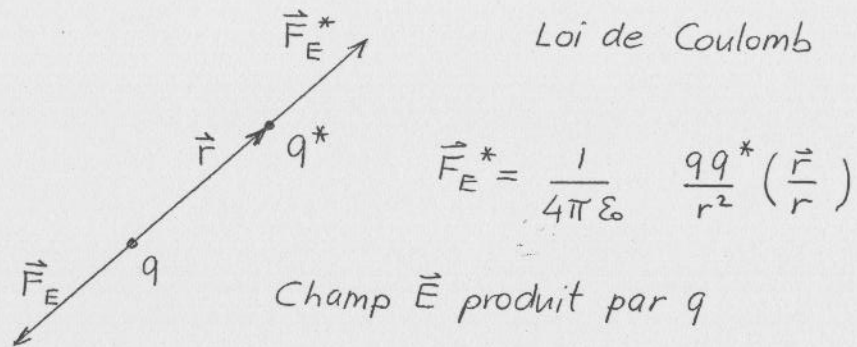
cette équ. doit être vérifiée $\forall$ le volume Ω
d'où l'équ. de continuité

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

analogue à la conservation de la masse
(méc. des fluides).

I ELECTROSTATIQUE (RAPPEL)

A) Lois fondamentales



$$\vec{F}_{E^*} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq^*}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Champ $\vec{E}$ produit par q

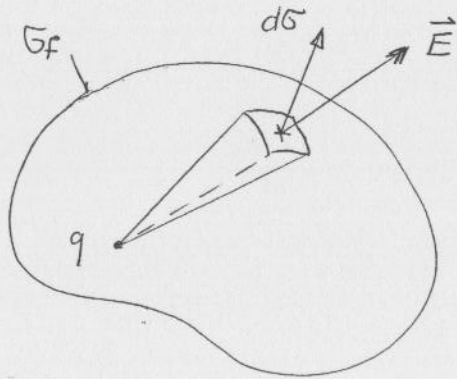
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

1) Il dérive d'un potentiel. On sait que $\vec{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

Donc $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

avec $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

2) Flux de $\vec{E}$ au travers d'une surface fermée $\mathcal{S}_F$



$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\mathcal{S}_F} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}_F} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

La quantité $\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}$ est l'élément d'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit $d\vec{S}$ depuis q .

donc $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega$

$$\int d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{si } q \text{ à l'intérieur de } \mathcal{S}_F \\ 0 & \text{si } q \text{ à l'extérieur de } \mathcal{S}_F \end{cases}$$

$$\oint_{\mathcal{S}_F} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ à l'intérieur de } \mathcal{S}_F \\ 0 & \text{si } q \text{ à l'extérieur de } \mathcal{S}_F \end{cases}$$

Grâce au principe de superposition

$$\epsilon_0 \oint_{\mathcal{S}_F} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \quad \text{Loi de Gauss}$$

i numérote uniquement les charges enfermées par $\mathcal{S}_F$

Dans le cas d'un continu de charge :

$$\epsilon_0 \oint_{\mathcal{S}_F} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\omega_0} \rho \, d\omega_0$$

ω_0 : volume limité par la surface fermée $\mathcal{S}_F$

En utilisant le théorème de la divergence

$$\epsilon_0 \int_{\omega_0} \operatorname{div} \vec{E} d\omega_0 = \int_{\omega_0} \rho d\omega_0$$

relation qui doit être satisfaite $\forall \mathcal{V}_F$, d'où la forme locale de la loi de Gauss :

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

on définit le champ de déplacement électrique

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

d'où

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

B) Le potentiel scalaire

En remplaçant $\vec{E}$ par $-\operatorname{grad} V$ ds. $\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$

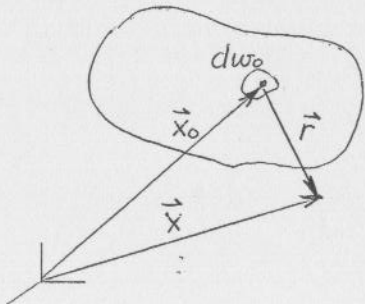
il vient $-\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \rho / \epsilon_0$

donc

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equ. de Poisson

Nous verrons dans la théorie des potentiels que cette équ. a la solution particulière



$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{\rho(\vec{x}_0)}{r} d\omega_0$$

On peut trouver intuitivement cette solution en écrivant que le potentiel produit en $\vec{x}$ par des charges $\rho d\omega_0$ en $\vec{x}_0$ est du type coulombien :

$$dV(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}_0) d\omega_0}{r}$$

En appliquant le principe de superposition :

$$V(\vec{x}) = \int dV(\vec{x})$$

Cette équ. contient la variable $\vec{x}_0$ repérant les points où sont placées les charges et la variable $\vec{x}$ qui repère le point où l'on mesure le potentiel produit par ces charges. Ainsi lorsqu'on calcule $E = -\operatorname{grad}$ il faut préciser que l'opérateur $\vec{\nabla}$ agit sur $\vec{x}$ (ce que l'on fait par l'indice $\vec{x}$)

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} V(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \int_{\omega_0} \frac{d\omega_0 \rho(\vec{x}_0)}{r(\vec{x}, \vec{x}_0)}$$

On obtient alors :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{d\omega_0 \rho(\vec{x}_0) \vec{r}}{r^3}$$

qui est l'expression de la loi de Coulomb dans le cas continu.

Remarques :

1) Lorsque $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ et lorsque $\rho(\vec{x}_0)$ est bornée, l'intégrale généralisée pr. V et $\vec{E}$ converge.

En effet on sait que la forme $\int_{\omega_0} \frac{d\omega_0}{r^n}$ converge si $n < 3$

RESUMÉ

Lois de l'électrostatique dans le vide

Forme différentielle

Forme intégrale

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

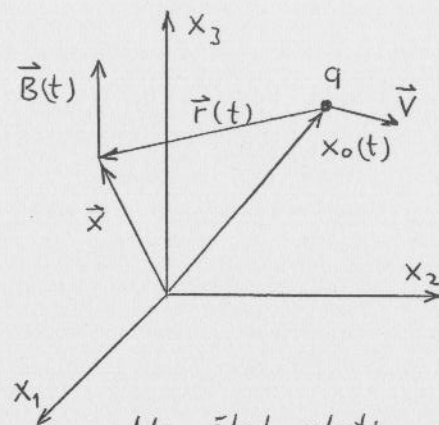
$$\int_{GF} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \sum_i q_i$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{d\omega_0 \rho(\vec{x}_0)}{r(\vec{x}, \vec{x}_0)}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{d\omega_0 \rho(\vec{x}_0) \vec{r}}{r^3(\vec{x}, \vec{x}_0)}$$

II CHAMP MAGNETIQUE STATIONNAIRE DANS LE VIDE (MAGNETOSTATIQUE)

A) Lois fondamentales



Une particule chargée qui se déplace dans un référentiel donné crée en tout point $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ un champ d'induction variable :

$$\vec{B}(\vec{x}, t)$$

Un état stationnaire n'est réalisable que par un mouvement collectif d'un ensemble de charges rappelant un écoulement du type hydrodynamique.

Il est possible de définir une densité de courant

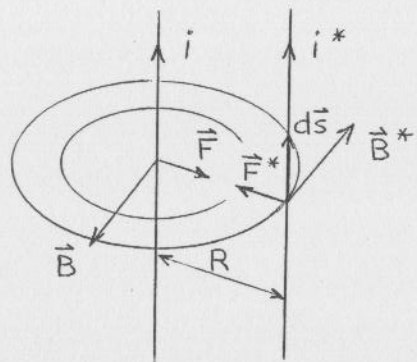
$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{et une intensité } i = \int_{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

La situation stationnaire caractérisée par $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{réalise les conditions}$$

nécessaires à l'étude d'un $\vec{B} \neq \vec{B}(t)$.

A cet égard, l'expérience d'Ampère est fondamentale car elle ne fait intervenir que la notion de courant électrique.



On mesure la force
 $|\vec{F}| = |\vec{F}^*|$
 s'exerçant sur deux conduct.
 rectilignes filiformes
 parcourus par des courants i et i^*

Faits expérimentaux :

- 1) Lorsque l'un des fils est dans un plan perpendic. à l'autre on n'observe pas de force.
- 2) Lorsque les fils sont parallèles on mesure une force $\vec{F}$ qui obéit à la loi :

$$|\vec{F}| \sim \frac{i i^* L}{R} ; L: \text{long. des fils}$$

L'équ. $d\vec{F} = i d\vec{s} \wedge \vec{B}$ devient dans ce cas
 $|\vec{F}| = i L |\vec{B}|$

On est conduit à attribuer au champ $\vec{B}$ deux propriétés fondamentales :

a). $\vec{B}$ produit par un courant i circulant dans un conducteur rectiligne filiforme admet comme lignes de champ des cercles dont les centres sont sur l'axe du conducteur.

b) L'amplitude de $|\vec{B}|$ obéit à :

$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$

La circulation d'un champ qui a ces propriétés, le long d'un contour fermé Γ entourant le conducteur est proportionnelle à i :

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} i & \text{si } \Gamma \text{ entoure le cond.} \\ 0 & \text{si } \Gamma \text{ n'entoure pas le cond.} \end{cases}$$

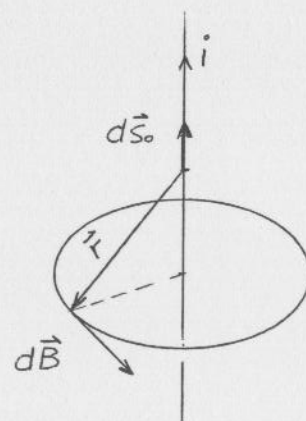
c'est la loi d'Ampère

Remarque : la divergence du champ $\vec{B}$ est nulle. en effet, les composantes

$$B_x = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} ; B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} ; B_z = 0$$

vérifient bien $\text{div } \vec{B} = 0$.

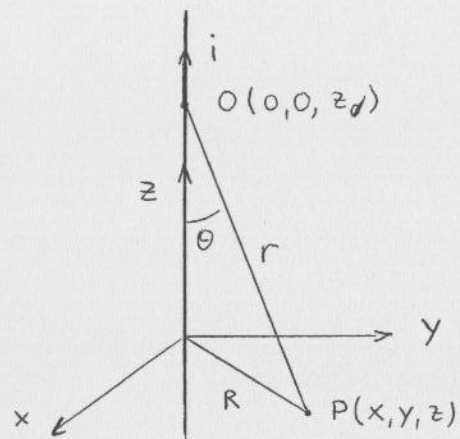
L'expérience montre que le champ $\vec{B}$ produit par



un courant circulant dans un conducteur filiforme doit pouvoir s'exprimer comme une somme de termes du type :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s}_0 \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Ainsi pour le fil rectiligne, il vient :



$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \sin \theta dz}{r^3}$$

$$z - z_0 = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = R/r$$

En éliminant θ et z_0

il vient :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} R \left[\frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{R^2 r} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

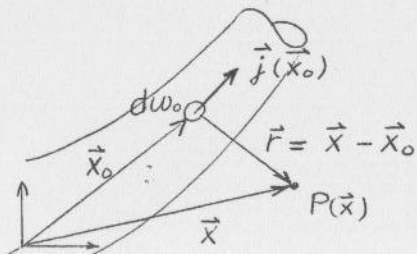
finallement on obtient bien :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$$

On écrit aussi

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\omega_0 \vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Equ. souvent appelée loi de Biot et Savart



Un champ qui obéit à une loi de type Biot et Savart a les propriétés fondamentales suivantes :

1) Il existe un potentiel vecteur $\vec{A}$ t.q. $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, en effet, en utilisant la relation

$$\vec{\text{rot}} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0, y_0, z_0)}{r} = \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

(l'opérateur rot agit sur les variables x, y, z et non x_0, y_0, z_0), on voit que la loi de Biot et Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\omega_0 \frac{\vec{j}(\vec{x}_0) \wedge \vec{r}}{r^3}$$

peut s'écrire

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\text{rot}} \int \frac{d\omega_0 \vec{j}(\vec{x}_0)}{r}$$

Ainsi l'équ. $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ est bien satisfaite et

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\omega_0 \vec{j}(\vec{x}_0)}{r}$$

Comme la $\text{div}(\text{rot}) = 0$ on aura toujours que $\text{div} \vec{B} = 0$

2). La loi d'Ampère

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \sum_{\text{int}} i$$

est toujours satisfaite (voir TD)

Dans un modèle continu, par définition

$$\text{on a } \sum_{\text{int}} i = \int_{\Sigma_s} \vec{j} \cdot d\vec{G}_0$$

Dans ce cas la loi d'Ampère s'écrit

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma_s} \vec{j} \cdot d\vec{G}_0$$

En utilisant le théorème de Stokes :

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Sigma_s} (\vec{r} \text{ rot } \vec{B}) \cdot d\vec{G}_0 = \int_{\Sigma_s} \vec{j} \cdot d\vec{G}_0$$

Comme cette relation doit être satisfaite pour toute surface Σ_s on a

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \vec{r} \text{ rot } \vec{B} = \vec{j}}$$

Dans le vide, on définit un champ magnétique $\vec{H}$ par la relation $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$

$$\boxed{\vec{r} \text{ rot } \vec{H} = \vec{j}}$$

B) Le potentiel vecteur

En remplaçant $\vec{B}$ par $\vec{r} \text{ rot } \vec{A}$

$$\vec{r} \text{ rot } \vec{r} \text{ rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

en analyse vectorielle on montre que :

$$\vec{r} \text{ rot } \vec{r} \text{ rot } \vec{A} = \vec{r} \text{ grad } \text{div } \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

où $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$ est le laplacien vecteur

Le champ $\vec{A}$ n'est pas exactement défini puisqu'il est possible de lui ajouter le gradient d'un champ scalaire sans modifier la valeur de $\vec{B}$ (car $\vec{r} \text{ rot } \vec{r} \text{ grad } \equiv 0$). Voir plus loin (th. des potentiels). Provisoirement, pour les phénomènes stationnaires, nous poserons $\text{div } \vec{A} = 0$
Il vient alors

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

Ainsi chaque composante du potentiel vecteur obéit à une équation de Poisson.

Par analogie avec les calculs du chapitre précédent il est possible d'écrire la solution

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{w_0} \frac{\vec{j} dw_0}{r(\vec{x}_0, \vec{x})}$$

Cette relation est bien conforme à celle déduite de la loi de Biot et Savart.

RÉSUMÉ

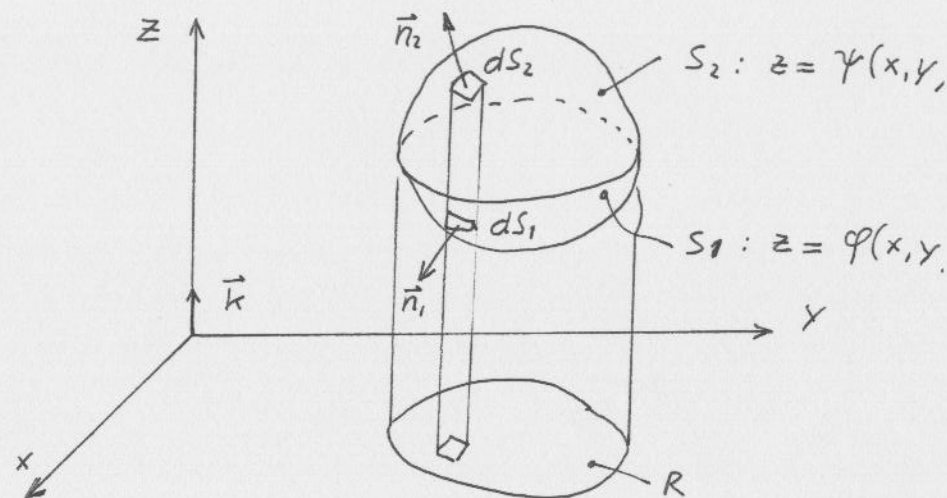
Lois du magnétisme statique dans le vide

Formes différentielles	Formes intégrales
$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\text{div } \vec{B} = 0$	$\int_{\sigma_F} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$
$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{\text{int}} i$
$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$	$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\omega_0} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0)}{r(\vec{x}, \vec{x}_0)} d\omega_0$ $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\omega_0} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0) \wedge \vec{r}}{r^3(\vec{x}, \vec{x}_0)} d\omega_0$

Equ. de Maxwell stationnaires

$\text{div } \vec{D} = \rho$ $\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ $\text{rot } \vec{E} = 0$

Démonstration du théorème de la divergence



Soit un champ vect. $\vec{A}(x, y, z)$

Soit S une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées coupe S en au plus deux points.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dz dy dx = \iint_R \left[\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right] dx dy \\ &= \iint_R A_3(x, y, z) \Big|_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dx dy = \iint_R [A_3(x, y, \psi) - A_3(x, y, \phi)] dx dy \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \iint_R A_3(x, y, \psi) dy dx &= \iint_{S_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS_2 \\ \iint_R A_3(x, y, \varphi) dy dx &= - \iint_{S_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS_1 \end{aligned} \right\}$$

$$= \iint_{S_2} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \iint_{S_1} A_3 \vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \iint_S A_3 \vec{k} \cdot \vec{n} dS$$

donc
$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV = \iint_S A_3 \vec{k} \cdot \vec{n} dS$$

de même par projection de S sur les autres plans de coordonnées, il vient :

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2 \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 \vec{i} \cdot \vec{n} dS$$

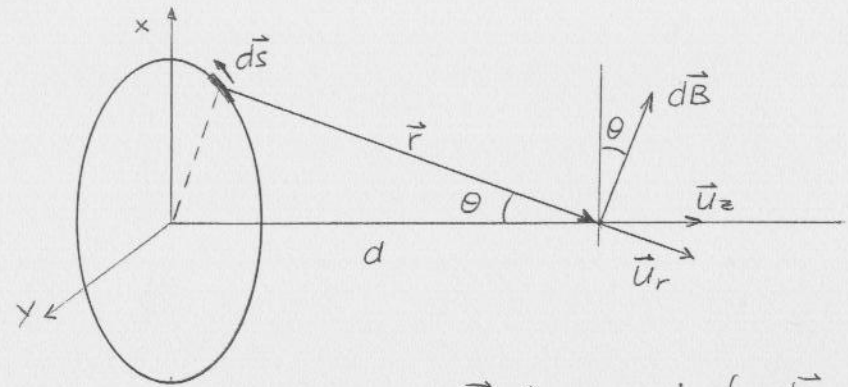
$$\Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \iint_S (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) \cdot \vec{n} dS$$

ou

$$\boxed{\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS}$$

Exercices

1) La spire circulaire dans le plan $x-y$



B et S.
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{s} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$dB_z = d\vec{B} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

Les composantes de $d\vec{B}$ // au plan de la spire vont s'annuler (symétrie).

$$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}} ; \quad r^2 = R^2 + d^2$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R ds}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + d^2)^{3/2}} \oint_C ds = \frac{\mu_0 i R^2}{2 (R^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = B_z \vec{u}_z$$

III PHENOMENES NON STATIONNAIRES

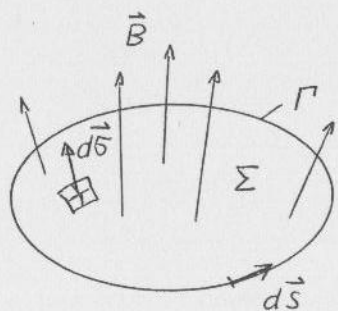
Dans le cas où les quantités ρ et $\vec{j}$ dépendent explicitement du temps, les équ. de Maxwell stationnaires ne sont plus valables.

Il apparaît alors une dépendance entre les phénomènes électriques et magnétiques ce qui se traduit par l'apparition de termes nouveaux dans les équ. fondamentales

A) Force électromotrice induite

Soit ϕ le flux du vecteur $\vec{B}$ au travers d'une surface Σ quelconque s'appuyant sur le contour Γ

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



Lorsque ϕ dépend du temps, on constate que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

L'expérience de Faraday montre que si l'on matérialise le circuit Γ par un fil conducteur fermé sur un instrument de mesure, un courant

électrique circule chaque fois qu'il y a variation de flux de $\vec{B}$ au travers de Σ . La loi d'induction s'écrit :

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}$$

où $\mathcal{E}$ est la force électromotrice induite définie par :

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

On en déduit :

$$- \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\int_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

d'où

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \text{div} \vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{B} = 0,$$

compatible avec $\text{div} \vec{B} = 0$ qu'il n'y a pas lieu de modifier.

On obtient ainsi un premier couple d'équ. pour les phénomènes dépendants du temps.

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Remarque:

L'expérience de Faraday se fait au moyen de conducteurs qui obéissent à la loi d'Ohm:

c'est une relation phénoménologique qui relie $\vec{E}$ et la densité de courant $\vec{j}$

$$\vec{E} = \rho_{\Omega} \vec{j}$$

où ρ_{Ω} est la résistivité du conducteur

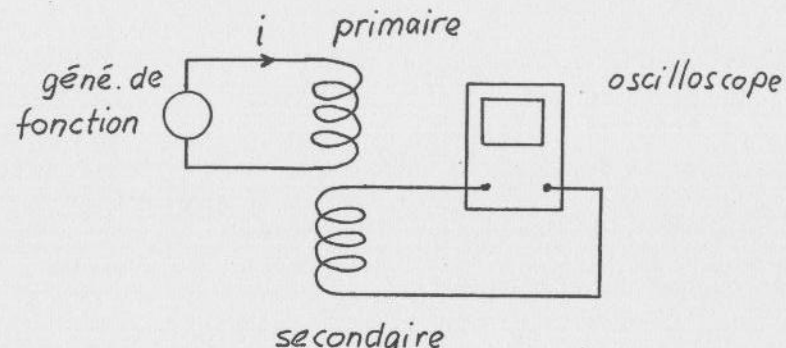
donc : $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \rho_{\Omega} \vec{j} \cdot d\vec{s}$

pour un conducteur filiforme et homogène ($\vec{j} \parallel d\vec{s}$, $|\vec{j}| = i/\sigma$ et $\rho_{\Omega} = \text{cte}$).

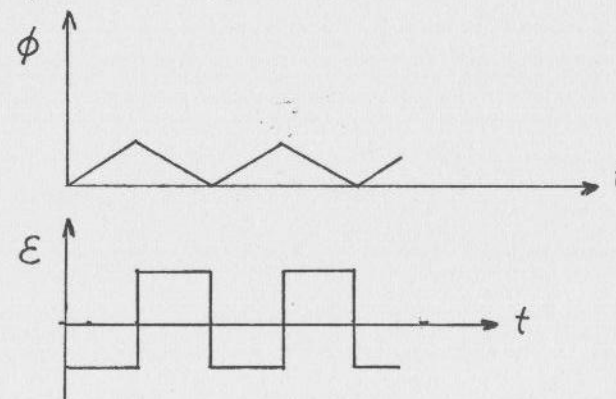
il vient $\mathcal{E} = \rho_{\Omega} \frac{L}{\sigma} i$ où $L = \oint |d\vec{s}|$

La quantité $\rho_{\Omega} \frac{L}{\sigma}$ est la résistance du circuit $R = \rho_{\Omega} \frac{L}{\sigma}$. L'expérience fournit le courant i dont on déduit $\mathcal{E} = Ri$.

L'expérience suivante confirme directement la loi d'induction:

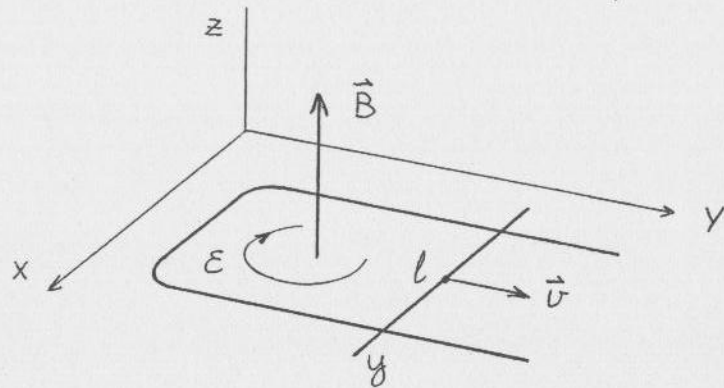


Le flux ϕ , induit dans la bobine secondaire par le champ $\vec{B}$ généré par le primaire, varie par exemple en dent de scie.



La f.e.m. induite est observée sur l'écran d'un oscilloscope, elle est égale à la dérivée de ϕ changée de signe

Est-il nécessaire de varier $\vec{B}$ pour produire une fém.? La réponse est non! Il suffit de faire varier la géométrie cad. ϕ .



$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_z d\sigma = B l y$$

variation du flux par unité de temps

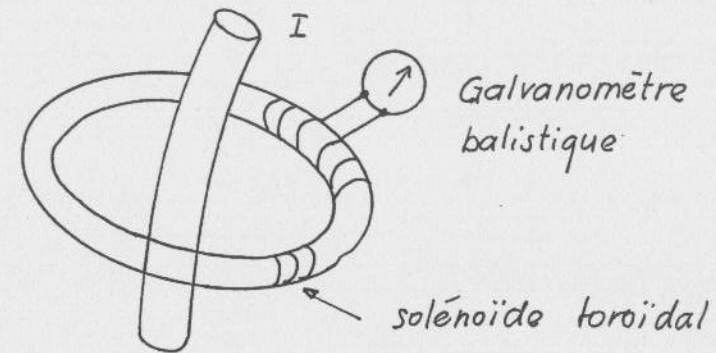
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} (B l y) = B l \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = B l v = \mathcal{E}$$

Le courant induit crée un flux qui s'oppose à l'augmentation du flux de $\vec{B}$.

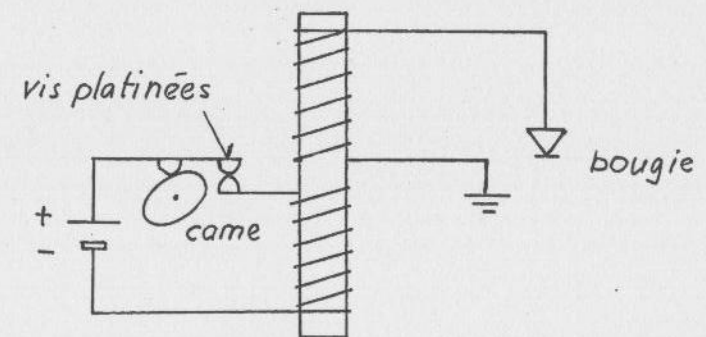
Applications:

1) Ruban de Rogowski



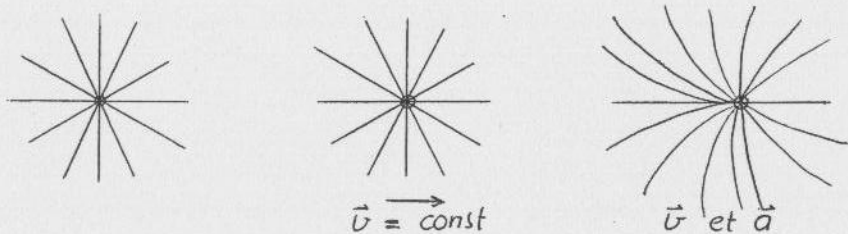
Lorsque l'on coupe I , l'instrument mesure la charge qui s'écoule à travers le circuit extérieur, c.à.d.
 $\sim \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$.

2) Allumage de voiture



B) Courant de déplacement de Maxwell

La loi de Gauss $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{int} q$ traduit une propriété fondamentale de la charge. Établie à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition, elle exprime que la densité de charge est la source du champ $\vec{D}$ ($\text{div } \vec{D} = \rho$). Lorsque la charge est en mouvement par rapport à un certain référentiel, le champ électrique n'est plus coulombien pour un observateur lié à ce référentiel.



Nous ferons l'hypothèse que la loi de Gauss reste valable dans le cas non stationnaire. Étant donné la signification physique de $\text{div } \vec{D} = \rho$, cette hypothèse s'introduit naturellement, elle se trouve d'ailleurs vérifiée dans ses conséquences par l'expérience.

Nous savons que l'équ. de continuité s'écrit :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

en remplaçant $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ par $\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ on obtient :

$$\text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Le flux du champ $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ au travers d'une surface fermée est nul. Puisque $\text{div } \vec{r} \otimes \vec{t} \equiv 0$, l'expression ci-dessus est équivalente à :

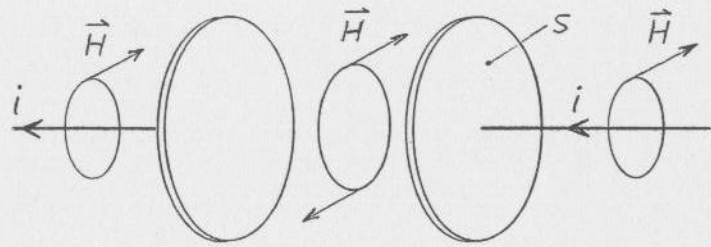
$$\vec{r} \otimes \vec{t} \vec{N} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{N}$ représente un certain champ vecteur. Dans le cas stationnaire on avait $\vec{r} \otimes \vec{t} \vec{H} = \vec{j}$, on est donc raisonnablement conduit à identifier $\vec{N}$ au champ $\vec{H}$. On obtient ainsi un second couple d'équations pour les phénomènes variables dans le temps.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \vec{r} \otimes \vec{t} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ est appelé densité de courant de déplacement de Maxwell.

Le rôle du courant de déplacement est illustré par l'opération de charge d'un condensateur plan



Les conducteurs sont parcourus par un courant i .

Entre les armatures, $i=0$ mais $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$

Soit $\rho_s(t)$, la densité de charge superficielle.

Nous avons montré que le champ $\vec{D}$ à l'intérieur du condensateur a une amplitude $D = \rho_s$, dans le cas où $\vec{D}$ est uniforme.

Considérons le courant i au travers d'une section Σ du fil :

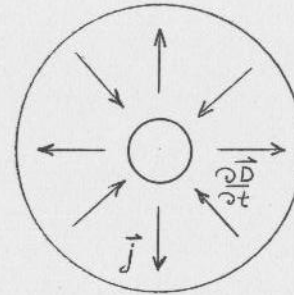
$$i = \left| \frac{dQ}{dt} \right| = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{G}$$

A la limite, cette relation est valable sur la surface d'une armature Σ' .

$$i = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Sigma'} \rho_s d\sigma}_Q = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma'} D d\sigma = \int_{\Sigma'} \frac{\partial D}{\partial t} d\sigma$$

Ainsi, la théorie de Maxwell exprime que $\vec{j}$ et $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ sont la cause d'un champ magnétique. Ce fait est confirmé par l'expérience.

Citons encore le cas du condensateur de Feynman (the Feynman Lectures on Physics Vol II).



Considérons un condensateur constitué de deux armatures sphériques, concentriques.

L'armature centrale émet des charges qui sont captées par l'armature externe. Il existe alors une densité de courant radiale $\vec{j}$ qui doit produire un champ magnétique $\vec{H}$, or la symétrie même du problème semble entraîner la non existence d'un champ $\vec{H}$. On peut vérifier que dans ce cas, le terme $\vec{j}$ est exactement compensé par le terme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ de Maxwell de sorte qu'il n'en résulte aucun champ magnétique.

c) Les équations de Maxwell

On appelle équations de Maxwell le quatre équs. suivantes :

1er couple :	$\text{div } \vec{B} = 0$	(1)
	$\vec{r} \otimes \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(2)
2ème couple :	$\text{div } \vec{D} = \rho$	(3)
	$\vec{r} \otimes \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	(4)

Remarquons encore qu'elles contiennent l'équation de continuité. En effet :

$$\text{div} (4) \rightarrow \text{div } \vec{r} \otimes \vec{H} \equiv 0 = \text{div } \vec{j} + \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{de plus } \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

(3)

$$\text{donc } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

D'autre part, comme nous l'avons vu, (1) est contenu dans (2).

Les équs. de Maxwell fournissent 7 équs. scalaires différentielles. Il est possible d'admettre ces équs. comme postulat de départ.

Les grandeurs scalaires sont au nombre de 16 ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}$ et ρ). Dans la matière condensée et lorsque $\vec{j} \neq 0$, il faut encore tenir compte des relations :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{D}, \vec{B}) \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}, \vec{D})$$

qui fournissent 6 équs. supplémentaires. Par ex., lorsqu'on peut définir une polarisation et une aimantation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

La deuxième égalité pour $\vec{D}$ et $\vec{B}$ est valable dans le cas linéaire uniquement. Avec ces 6 équs. scalaires supplémentaires on a 13 équs. pour 16 grandeurs.

De plus, dans certains milieux conducteurs, il existe une relation phénoménologique entre $\vec{E}$ et $\vec{j}$, qui se réduit quelquefois à la loi d'Ohm

$$\vec{E} = \rho_\Omega \vec{j} \quad \rho_\Omega : \text{la résistivité}$$

Au total on a alors 16 équs. à 16 inconnues.

Remarques

1). Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une loi phénoménologique, on est amené à utiliser l'équ. du mvmt. des charges

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

2). L'équ. $\text{div } \vec{B} = 0$ peut être comparée à l'équ. $\text{div } \vec{D} = \rho$, de même, l'équ. $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ peut être comparée à l'équ. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Aucune mesure n'a révélé jusqu'ici l'existence d'un "monopôle" magnétique qui permettrait d'écrire les équ.s de Maxwell sous forme symétrique, en introduisant une densité de monopôles magnétique et une densité de courant de monopôles. La découverte d'une particule ayant les propriétés d'un monopôle magnétique confirmerait une prévision théorique due initialement à Dirac.

3). A partir des équ.s. de Maxwell locales on peut trouver une forme globale (ou intégrale) de la manière suivante:

Les équ.s. contenant les "div" sont multipliées par un élément de volume dw et intégrées dans un

volume w quelconque. On utilise ensuite le théorème de la divergence $\left(\int_{\Sigma_F} \vec{D} \cdot d\vec{G} = \int_w \text{div } \vec{D} dw \right)$.

Les équ.s. contenant des $\vec{\text{rot}}$ sont multipliées par un élément $d\vec{s}$ d'une ligne fermée quelconque et intégrées le long de cette ligne. On utilise alors le théorème de Stokes $\left(\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{G} \right)$.

d) Récapitulation

1er couple

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{G} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{G}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

2ème couple

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$(\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E})$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{G} = \sum q$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

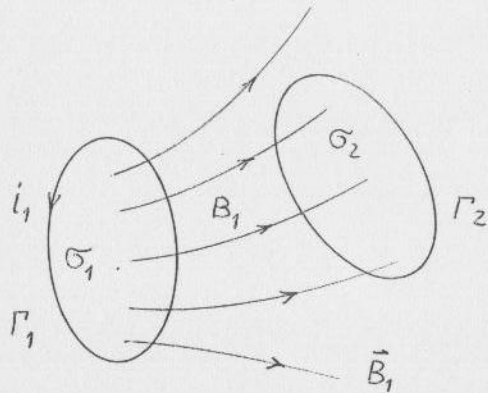
$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum i + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{G}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (*) \quad (\vec{B} = \mu_0 \vec{H})$$

(*) Cette équ. sera établie dans la th. des potentiels

Self induction et induction mutuelle

Soit un circuit Γ_1 parcouru par un courant i_1 .
Soit ϕ_{11} le flux de $\vec{B}_1$ au travers de σ_1 et ϕ_{12} le flux de $\vec{B}_1$ au travers d'une surface σ_2 sous-tendue par le circuit Γ_2 .



$$\phi_{11} = \int_{\sigma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_1$$

$$\phi_{12} = \int_{\sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2$$

Le champ $\vec{B}_1$ et par conséquent ϕ_{11} et ϕ_{12} sont proportionnels au courant i_1 . On définit :

$L_1 = \frac{\phi_{11}}{i_1}$	coef. de self de la boucle 1.
$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_1}$	coef. d'induct. mutuelle de 1 sur 2

Réciproquement, si Γ_2 est parcouru par un courant i_2 on peut définir un coef. $M_{21} = \frac{\phi_{21}}{i_2}$.

On pourra démontrer que $M_{jk} = M_{kj}$.

Donc le flux total ϕ_k embrassant une spire k parcourue par un courant i_k dans le voisinages d'autres spire j traversées par des courants i_j vaut :

$$\phi_k = L_k i_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} i_j$$

Si la spire Γ_2 est ouverte, on aura bien sûr :

$$\mathcal{E}_2 = - \int_{\sigma_2} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma}_2$$

où $\mathcal{E}_2$ est la fém. induite dans la spire Γ_2 .

On a donc :

$$\mathcal{E}_2 = - M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

On en tire que : $M_{12} i_1 = \int_{\sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2$

donc

$$M_{12} = \frac{1}{i_1} \int_{\sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2$$