

IV L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

1. Le travail de la force de Laplace - Lorentz

On sait qu'une particule chargée dans un champ électromagnétique subit une force :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Ainsi la particule reçoit un travail

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} = 0)$$

Le système, la charge reçoit de l'énergie de l'extérieur quand $dw > 0$.

Dans un modèle continu, on peut définir une densité de charge ρ ($dq = \rho dw$). La puissance reçue par unité de volume est alors

$$\frac{dw}{dw dt} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

où $\vec{j}$ est la densité de courant. Quelle est l'origine de ce travail ?

Une interprétation des phénomènes compatible avec l'idée de conservation de l'énergie consiste à admettre que le champ é-m possède une énergie qui est partiellement transférée à la particule par le travail

de la force de Laplace - Lorentz. Dans cette interprétation, on doit parvenir à trouver une équ. de conservation :

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \mathcal{G}_{EM}$$

$\vec{S}$ est l'intensité d'un courant d'énergie EM $\left[\frac{J}{s \cdot m^2} \right]$

u_{EM} la densité d'énergie EM $\left[\frac{J}{m^3} \right]$

$\mathcal{G}_{EM}$ la source d'énergie EM $\left[\frac{J}{s \cdot m^3} \right]$ comportant au moins le terme $-\vec{j} \cdot \vec{E}$

Pour trouver une équ. de conservation il faut partir des deux equs. de Maxwell suivantes :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En multipliant la 1ère équ. par $\vec{E}$ et la 2ème par $\vec{H}$ et en soustrayant membre par membre :

$$\underbrace{\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H}}_{\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\boxed{-\vec{E} \cdot \vec{j} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Cette relation possède au moins la même validité que les équ. de Maxwell.

2) Bilan d'énergie électromagnétique

Comme nous l'espérons la dernière relation ressemble à un bilan d'énergie. Le terme de source est $-\vec{E} \cdot \vec{j}$. L'identification des autres terme de l'équ. n'est pas unique. La manière la plus simple de procéder consiste à poser

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

$\vec{S}$: vecteur de Poynting

ainsi

$$\boxed{\text{div } \vec{S} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j}}$$

Introduisons la grandeur $\mathcal{G}'_{EM}$ qui représente toutes les sources (ou les puits) d'énergie EM qui ne sont pas comptées dans $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ (par exemple les contributions dipolaires électriques et magnétiques). Par définition :

$$\mathcal{G}_{EM} = \mathcal{G}'_{EM} - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

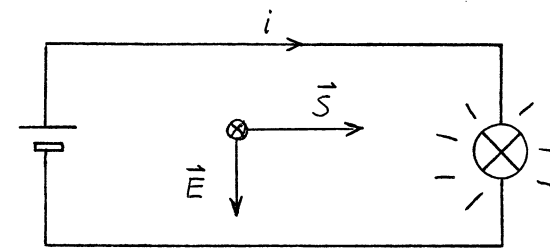
Il vient alors :

$$\underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial u_{EM}}{\partial t}} + \mathcal{G}'_{EM} = \underbrace{\mathcal{G}'_{EM} - \vec{E} \cdot \vec{j}}_{\mathcal{G}_{EM}} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \mathcal{G}_{EM} - \text{div } \vec{S}$$

Cette interprétation conduit à certaines conséquences qui semblent à première vue paradoxales, elle est cependant vérifiée par l'expérience d'une manière spectaculaire dans les phénomènes de propagation des ondes EM.

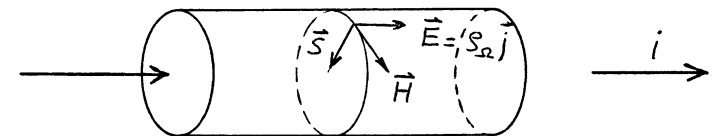
3) Conséquence de l'interprétation de Poynting



Par exemple, le vecteur de Poynting responsable du transport d'énergie

par une ligne bifilaire existe essentiellement dans l'espace en dehors des conducteurs

Zoom sur le conducteur de résistance R

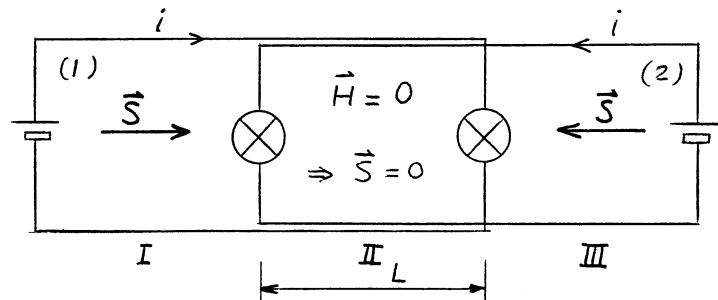


En tout point du conducteur, $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ est radial dirigé vers le centre du cylindre. En appliquant l'équ. au volume du cylindre $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ et $\mathcal{G}'_{EM} = 0$

$$0 = - \underbrace{\int_{\omega_0} \vec{E} \cdot \vec{j} d\omega_0}_{- Ri^2} - \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

Ainsi le flux du vecteur de Poynting au travers de la surface limitant les conducteurs est égal à Ri^2 . L'énergie est transportée dans l'espace vide. Les conducteurs "prélèvent" une partie de cette énergie pour compenser leurs pertes par effet Joule.

On obtient une situation plus étonnante encore en considérant 2 lignes bifilaires :

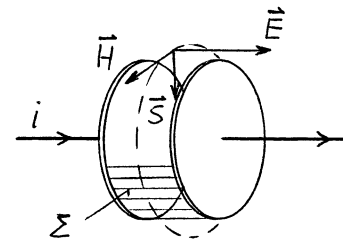


Dans la région II, $\vec{H} = 0$ donc aussi $\vec{S} = 0$. L'énergie qui alimente le récepteur du circuit 2 semble provenir du générateur lié au circuit 1 et vice versa.

Il faut remarquer que si l'on interrompt le circuit 1, le récepteur 2 doit cesser d'être alimenté pendant un intervalle de temps $\tau = L/c$ (c : vitesse de l'onde dans le vide). Après ce temps il sera de nouveau alimenté, mais cette fois par le générateur 2

qui appartient à son propre circuit.

Signalons encore quelques faits remarquables liés à l'interprétation de Poynting :



a) Lorsqu'on charge un condo, le flux d'énergie se fait par Σ qui s'appuie sur les armatures. L'énergie qui pénètre ainsi au travers de Σ pendant l'opération de charge correspond exactement à l'énergie électrostatique $\frac{1}{2} C \Delta v^2$ du condensateur. (voir exercices).

4). La densité d'énergie EM

Dans le vide*, la variation de la densité d'énergie EM :

$$\frac{\partial U_{EM}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + G'_{EM}$$

Si le milieu est linéaire, il n'y a pas de pertes diélectriques ou magnétiques et $G'_{EM} = 0$

En multipliant par dt cette équ. on obtient

$$d_{\ell} U_{EM} = \vec{E} \cdot d_{\ell} \vec{D} + \vec{H} \cdot d_{\ell} \vec{B}$$

(On a utilisé le symbole d_{ℓ} pour désigner l'opération $dt \cdot \frac{\partial}{\partial t}$, c'est une différent. calculée en x, y, z donné.)

* ou la matière dipolaire linéaire

Lorsque la dépendance entre $\vec{E}$ et $\vec{D}$ d'une part et $\vec{H}$ et $\vec{B}$ d'autre part est linéaire, on peut intégrer cette équ.

$$U_{EM} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$$

On doit remarquer que l'interprétation classique de l'électromagnétisme conduit à attribuer à tout l'espace l'énergie d'une charge ou d'un ensemble de charges ponctuelles.

5) Pertes dans les conducteurs ohmiques.

Lorsque $\vec{E} \cdot \vec{j} > 0$, on a une perte d'énergie EM.

$$\vec{E} = \rho_{\Omega} \vec{j}$$

La perte totale dans le volume ω_0 est alors donnée par l'équ.

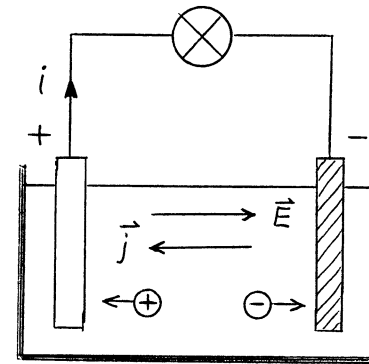
$$P = \int_{\omega_0} \rho_{\Omega} \vec{j}^2 d\omega_0$$

Pour un conducteur filiforme de longueur L et de section S_c on obtient:

$$P = \rho_{\Omega} \frac{L}{S_c} i^2 = R i^2 \quad ; \quad R: \text{résistance électrique du conducteur}$$

6) Source d'énergie E-M

Lorsque $\vec{E} \cdot \vec{j} < 0$ on a une source d'énergie EM



c'est le cas en particulier des piles électriques

Près des électrodes, les ions subissent une action d'ordre chimique qui produit une densité de

courant opposée au champ électrique.

Dans ce phénomène, la force $q\vec{E}$ est compensée par une force généralisée au sens de la phénoménologie des processus irréversibles.

7) Existence d'une force électromotrice

Lorsqu'il existe une force électromotrice, l'intégrale de volume du terme de source

$$P = - \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{j} d\omega_0 \quad \text{devient}$$

$$P = - \int_{\Sigma} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{j} (d\vec{s}_0 \cdot d\vec{b}_0)$$

en choisissant $d\vec{s}_0 \parallel \vec{j}$ il vient :

$$P = - \oint_{\Gamma} \int_{\Sigma} (\vec{j} \cdot d\vec{G}_0) \vec{E} \cdot d\vec{s}_0$$

Le terme $\vec{j} \cdot d\vec{G}_0$ est constant le long d'une ligne de courant, donc

$$P = - \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{G}_0 \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}_0$$

Par définition de la force électromotrice e et du courant i on a :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}_0$$

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{G}_0$$

La puissance P correspondant au terme de source $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ s'exprime donc de la manière suivante

$$P = -ei$$

C'est une puissance reçue par le champ EM

Dans le cas d'une fém induite $\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}$ l'équ. ci-dessus devient

$$P = \frac{d\phi}{dt} i$$

L'énergie $dU = P dt$ correspond. au terme de source $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ est alors donnée par la relation :

$$dU_{EM} = i d\phi$$

dU_{EM} est une augmentation de l'énergie électromagnétique produite par une augmentation de flux $d\phi$.

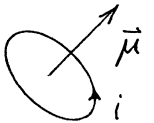
On pourra montrer à titre d'exercice que l'énergie contenue dans une bobine de self L , parcourue par un courant i vaut $\frac{1}{2} L i^2$.

8). Energie de couplage d'un moment dipolaire magn.

Une petite spire plane parcourue par un courant i définit un moment dipolaire magnétique

$\vec{\mu} = i \vec{G}$ où $\vec{G}$ est un vecteur

normal au plan de la spire dont le module mesure l'aire de la spire.



L'équ. $dU_{EM} = i d\phi = i \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{G}$ devient si la spire est très petite :

$$dU_{EM} = i d(\vec{B} \cdot \vec{G})$$

Pour $i = \text{cte}$ on peut écrire

$$dU_{EM} = d(i \vec{B} \cdot \vec{G})$$

Il vient finalement

$$dU_{EM} = d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

En intégrant on obtient :

$$\Delta U = U_1 - U_2 = (\vec{\mu} \cdot \vec{B})_1 - (\vec{\mu} \cdot \vec{B})_2$$

ΔU est l'énergie reçue par le champ EM lorsqu'on déplace un moment $\vec{\mu}$ d'un point 1 à un point 2.

Si $2) \rightarrow \infty$. (on suppose $\vec{B} = 0$ à l' ∞) :

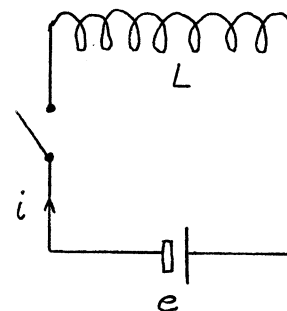
$$\Delta U = (\vec{\mu} \cdot \vec{B})_1$$

L'énergie de couplage du dipôle dans $\vec{B}(\vec{x})$ est celle qu'il faut lui fournir pour le déplacer d'un point $\vec{x}$ à l' ∞ :

$$E_c = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

Etablissement du courant dans une bobine d'induction

Soit une bobine de résistance R dont l'inductance propre est L et soit e la fém. de la source.



Le courant ne s'établit pas instantanément, et demande un certain temps pour atteindre sa valeur finale $i_0 = e/R$

En effet, l'apparition d'un flux ϕ dans la bobine produit une force "contre-électromotrice" dont la valeur instantanée est :

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

Au bout d'un temps t après la fermeture de l'interupteur, donnons à t un accroissement dt . Alors i varie de di et ϕ de $d\phi$:

$$i = \frac{\sum \text{fem}}{R} = \frac{e + \mathcal{E}}{R}$$

$$Ri - \mathcal{E} = e$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e$$

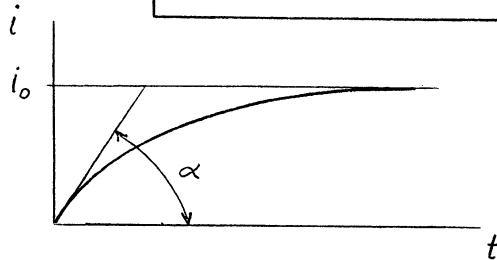
Séparons les variables :

$$\frac{di}{e - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R} (\ln(e - Ri)) \Big|_0^i = \frac{1}{L} (t) \Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{e - Ri}{e}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$i = i_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \quad i_0 = \frac{e}{R}$$



$$\tan \alpha = \frac{i_0 R}{L}$$

$\tau = L/R$: constante de temps de la bobine

$[L] = \text{henrys}$ $[R] = \text{ohms}$ $[t] = \text{secondes}$

Energie fournie par la source. Multiplions les 2 memb.

de : $e = Ri + L \frac{di}{dt}$ par $i dt$, ce qui

fait apparaître l'énergie dW fournie par la source pendant dt

$$dW = e i dt = Ri^2 dt + L i di$$

$$e dq = Ri^2 dt + L i di$$

$$\int_0^Q e dq = \int_0^\infty Ri^2 dt + \int_0^{i_0} L i di$$

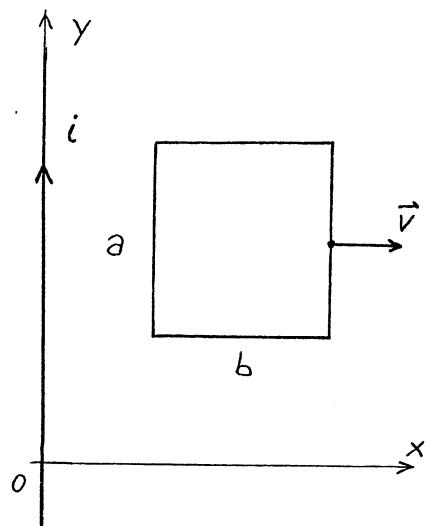
$$e Q = \text{dissipation} + \frac{L i_0^2}{2}$$

Ainsi, l'énergie totale fournie par la source se divise en deux parties : d'une part la dissipation dans R , d'autre part, une énergie qui sera emmagasinée sous forme potentielle dans le flux magn. Donc pour créer un flux magnétique il faut dépenser une énergie

$$U = \frac{1}{2} L i_0^2$$

Celle-ci sera d'ailleurs restituée, en chaleur, lorsque l'on coupera le courant (ϕ disparaît) : c'est l'extra-courant de rupture.

Exercice



Un fil vertical infini est parcouru par un courant I . On déplace, à proximité un cadre conducteur de résistance R , rectangulaire, de côté a et b , placé dans le plan xy . Le cadre est déplacé à vitesse const. $\vec{v}$, perp. au fil.

calculer :

- le courant $i(t)$ induit dans le cadre
- la force $F(t)$ qu'il faut exercer sur le cadre pour le déplacer.
- la puissance nécessaire à ce déplacement; comparer avec la puissance dissipée dans le cadre par effet Joule.

a) $\vec{B}(x)$ est $\perp$ au plan xy : $B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

Le flux de B à travers le cadre est :

$$\phi(t) = \int_{x(t)}^{x(t)+b} a B(x') dx' = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x(t)+b}{x(t)}$$

avec $x(t) = vt$ on obtient :

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{vt} \right)$$

d'où la fem :

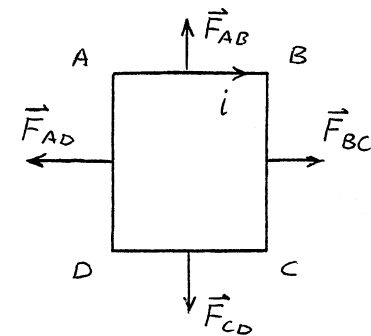
$$\mathcal{E}(t) = - \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \left(1 + \frac{b}{vt} \right) = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi} \frac{1}{bt + vt^2}$$

et donc le courant

$$i(t) = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi R} \frac{1}{bt + vt^2}$$

- b) de la présence simultanée du champ $\vec{B}(x)$ et du courant $i(t)$ résulte une force de Lorentz sur le cadre

$$\vec{F}(t) = \int_{\text{cadre}} i(t) d\vec{s} \wedge \vec{B}$$



$\vec{F}_{AB}$ et $\vec{F}_{CD}$ se compensent par symétrie.

Par contre $|\vec{F}_{AD}| > |\vec{F}_{BC}|$; il y a donc une résultante opposée à $\vec{v}$; pour déplacer le cadre à vitesse constante il faut vaincre cette force.

$$F_{AD}(t) = i(t) \left| \int_D^A d\vec{s} \wedge \vec{B} \right| = i(t) a B (x = vt)$$

$$F_{BC}(t) = i(t) \left| \int_B^C d\vec{s} \wedge \vec{B} \right| = i(t) a B (x = b + vt)$$

La résultante est donc : $F(t) = F_{AD}(t) - F_{BC}(t)$:

$$F(t) = a i(t) \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{vt} - \frac{1}{b + vt} \right)$$

$$F(t) = i(t) \frac{\mu_0 I a b}{2\pi} \frac{1}{b + vt} \cdot \frac{1}{v}$$

ou :
$$F(t) = \frac{R}{v} i^2(t)$$

c) Comme $\vec{F} \parallel \vec{v}$, la puissance mécanique instantanée que l'on doit fournir est :

$$P(t) = F(t) v = R i^2(t)$$

Elle est à chaque instant identique à la puissance dissipée dans le cadre par effet Joule.

V PROPAGATION DES PHENOMENES EM

(dans les milieux linéaires sans charges ni courants,

La propagation des phénomènes EM est régie par les équations de Maxwell. Pour mieux comprendre ce phénomène nous allons chercher à séparer le champ $\vec{H}$ et le champ $\vec{E}$. Cela est possible dans le cas linéaire sans charge ni courant. Nous avons alors :

$$\mu_0 \mu_r \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ϵ_r et μ_r sont supposés indépendants du temps et du lieu ($\epsilon_r = \mu_r = 1$ ds le vide).

Dérivons (4) par rapport à t et remplaçons $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ par sa valeur tirée de (2). Il vient :

$$-\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \underbrace{(\vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E})}_{\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'après (3) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, on obtient alors

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Par un calcul analogue on trouve pour $\vec{H}$:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

On obtient ainsi 2 équ. de propagation d'onde de d'Alembert pour $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{H}(\vec{r}, t)$. La vitesse de propagation (vitesse de phase) vaut :

$$u = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$$

$u = c$ = vitesse des ondes EM dans le vide

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Choisissons par exemple pour $\vec{E}(x, y, z, t)$ une forme d'onde plane progressive. Sans ôter de la généralité on peut choisir le référentiel de manière à ce que l'axe z coïncide avec la direction de propagation :

$$\vec{E} = \vec{E}(z - ut)$$

Nous choisirons une onde sinusoïdale sans rien enlever de la généralité puisque toute forme périodique ou non périodique peut être décomposée en une somme ou intégrale de Fourier.

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) \\ u = \omega/k \end{array} \right.$$

$\text{div } \vec{E} = 0$ donne :

$$E_{0z} k \cos(kz - \omega t) = 0 \quad \forall z, t \rightarrow E_{0z} = 0$$

L'onde est donc de type transversal, elle se propage selon z et vibre dans un plan $\perp$ à Oz .

Choisissons l'axe x comme direction de vibration.

$$\vec{E}(z, t) = \vec{i} E_{0x} \sin(kz - \omega t)$$

Calculons le $\vec{\text{rot}}$ de cette expression et appliquons la relation (2) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{j} E_{0x} k \cos(kz - \omega t) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

En intégrant par rapport au temps, il vient :

$$\vec{H}(z, t) = \vec{j} \left[\frac{E_{0x} k}{\mu_0 \mu_r \omega} \sin(kz - \omega t) + C(\vec{r}) \right]$$

$C(\vec{r})$: const. d'intégration indép. du temps.

On se convainc facilement (équations de Maxwell) que c est indépendant du lieu.

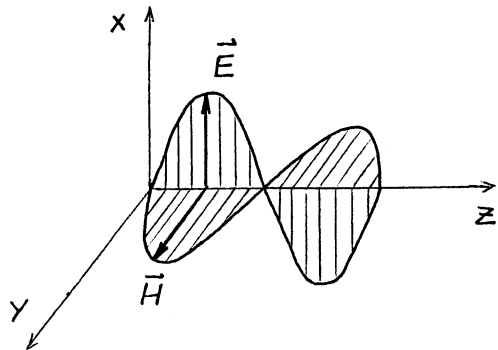
$$\vec{H}(z,t) = \vec{j} H_{0y} \sin(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_{0x}}{H_{0y}} = \mu_0 \mu_r u = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z \quad \left[\frac{V}{A} = \Omega \right]$$

Z est l'impédance du milieu par rapport à la propagation de l'onde EM. L'impédance du vide:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

Nous venons de décrire la propagation d'une onde plane électromagnétique progressive sinusoïdale (monochromatique). Cette onde est polarisée linéairement. On entend par là que le champ $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vibrent dans des plans (ici xz et yz) fixes dans le temps et l'espace.



Les ondes EM obéissent à une équ. de d'Alembert tout comme les ondes élastiques ou de déformation.

Soit le terme de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

$$|\vec{S}|(z,t) = |\vec{E}| |\vec{H}| = \frac{E^2(z,t)}{Z} = Z H^2(z,t)$$

Pour une onde plane harmonique

$$\vec{S} = \vec{k} \frac{1}{Z} E_{0x}^2 \sin^2(kz - \omega t)$$

En chaque endroit on aura en moyenne dans le temps:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_{0x}^2}{Z} = \frac{1}{2} Z H_{0y}^2$$

L'indice de réfraction $n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

Dans un diélectrique, $\mu_r = 1$ et $n = \sqrt{\epsilon_r}$; dans les milieux dispersifs $\omega = \omega(k)$ et donc n dépend de la fréquence, c'est le cas du quartz.

Propagation EM dans les conducteurs ohmiques

Propagation dans les milieux sans charges

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \vec{E} = r \vec{j}$$

r : résistivité électrique

Typiquement, il s'agira de la propagation dans les conducteurs.

En remplaçant dans les éq.s de Maxwell avec $\rho = 0$ il vient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

On peut vérifier que ces éq.s. de propagation contiennent des solutions qui ont la forme d'ondes amorties. Cela est naturel puisque les termes non invariants par rapport au signe du temps (termes en $\frac{\partial}{\partial t}$) sont responsables des phénomènes de dissipation.

Par exemple, pour une propagation d'onde plane selon la direction Oz on a la solution :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{i} E_{0x} e^{-\kappa z} \sin(kz - \omega t) \\ \vec{H}(z,t) &= \vec{j} H_{0y} e^{-\kappa z} \sin(kz - \omega t + \phi)\end{aligned}$$

En consistence avec les éq.s encadrées ci-dessus on trouve :

$$2\kappa k - \frac{\mu_0 \mu_r \omega}{r} = 0$$

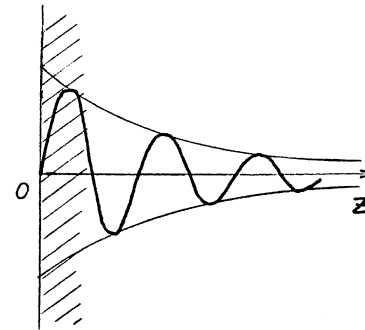
$$\kappa^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{u^2} = 0$$

κ^{-1} est la profondeur de pénétration de l'onde EM;

on a aussi : $\frac{E_{0x}}{H_{0y}} = \frac{\mu_0 \mu_r \omega}{\sqrt{\kappa^2 + k^2}}$

$$\tan \phi = \kappa / k$$

Si $\frac{\mu_0 \mu_r}{r} \gg \frac{\omega^2}{u^2}$ alors $\kappa = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r \omega}{2r}}$



On dit que l'onde ne pénètre que dans une épaisseur de l'ordre de κ^{-1} près de la surface du conducteur, c'est l'effet de peau.

Pour des propagations plus compliquées (conducteurs de forme quelc.) on retrouve essentiellement le même résultat : l'onde pénètre dans le conducteur où elle est amortie

Solution de l'équation de d'Alembert

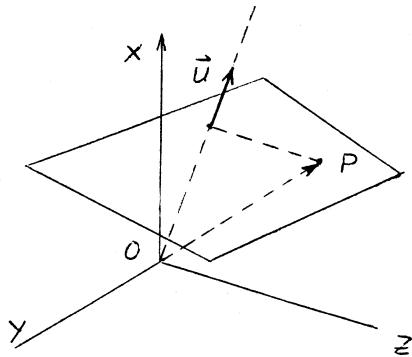
Nous savons que l'équ. de d'Alembert à une dim., pour une perturbation f de polarisation donnée, possède la solution générale :

$$f(x, t) = f_-(x - ut) + f_+(x + ut)$$

càd. la somme de deux solutions particulières (onde indéformable, progressive et rétrograde)

A trois dimensions, dans le cas où $\vec{u} = u \vec{n}$ ($\vec{n}$ = vect. unité) l'équ. de d'Alembert admet une sol. particulière.

$$f(\vec{r}, t) = f_{\pm}(\vec{n} \cdot \vec{r} \mp ut)$$



qui correspond aux ondes planes indéformables progressives (signe -) ou rétrograde (signe +). La propagation a lieu dans la direction $\vec{n}$ de cosinus directeur (α, β, γ) .

En effet, soit $q = \vec{n} \cdot \vec{r} \mp ut$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \quad \nabla^2 f - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

On parle d'onde plane car le lieu des points caractérisé par $f = \text{const}$ à t donné sont sur un plan :

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = C \mp ut \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = C \mp ut$$

En fonction du temps ce plan avance dans la direction $\vec{n}$ avec la vitesse $\vec{u}$.

Un cas particulièrement intéressant d'onde plane est l'onde plane harmonique où la fonction f est un sinus ou un cosinus. Dans un cas sinusoïdal progressif :

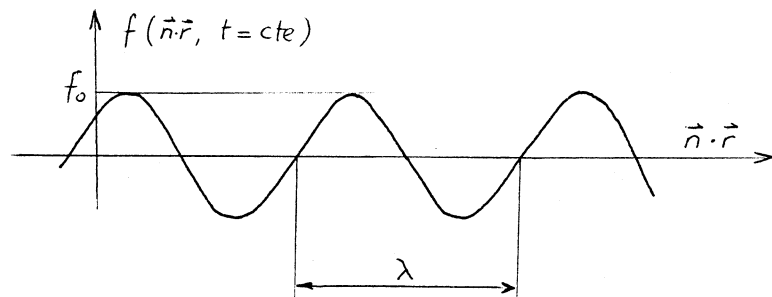
$$f = f_0 \sin k(\vec{n} \cdot \vec{r} - ut)$$

f_0 est l'amplitude et k un facteur de proportionnalité dont les unités sont l'inverse d'une longueur

Signification de k

Posons $t = \text{cte}$ et représentons $f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t = \text{cte})$ en fonction de $\vec{n} \cdot \vec{r}$. Rappelons que f peut être dirigé selon $\vec{n} \cdot \vec{r}$ (onde longitudinale) ou perpendiculairement (onde

transversale) mais que par commodité, dans un cas et dans l'autre, on le reporte $\perp$ à $\vec{n}$.



Définition : on appelle longueur d'onde la grandeur λ telle que

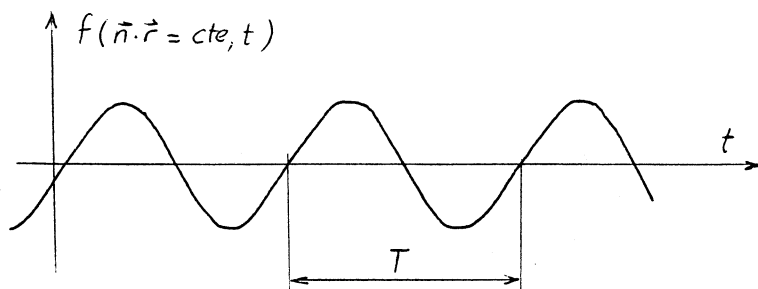
$$\forall \vec{n} \cdot \vec{r}, \quad f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t = \text{cte}) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} + \lambda, t = \text{cte})$$

ou
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k est appelé nombre d'onde et $\vec{k} = k \vec{n}$ est appelé vecteur d'onde.

Signification de ku

Plaçons nous maintenant en un endroit donné $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{cte}$ et reportons f en fonction du temps.



Définition : on appelle période, l'intervalle de temps T t.q

$$\forall t, \quad f(\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{cte}, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{cte}, t + T)$$

$$\Rightarrow kuT = 2\pi \rightarrow \boxed{ku = \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

ω est la pulsation et se mesure en s^{-1} .

En tenant compte de ces notations :

$$f = f_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

ou en employant les notations complexes d'Euler

$$f = f_0 \text{Im} \{ e^{i(kr - \omega t)} \}$$

Signalons l'onde sphérique qui est une propagation isotrope du phénomène considéré ; $f(r, \theta, \varphi) = f(r)$

Equ. de d'Alembert : devient alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

ou : $\frac{\partial^2(fr)}{\partial r^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2(fr)}{\partial t^2} = 0$ La qutē. fr se propage comme une onde plane a 1 dim.

dont la sol. gēn. est :

$$f = \frac{1}{r} [f_-(r - ut) + f_+(r + ut)]$$

Propagation des ondes EM dans un milieu anisotrope

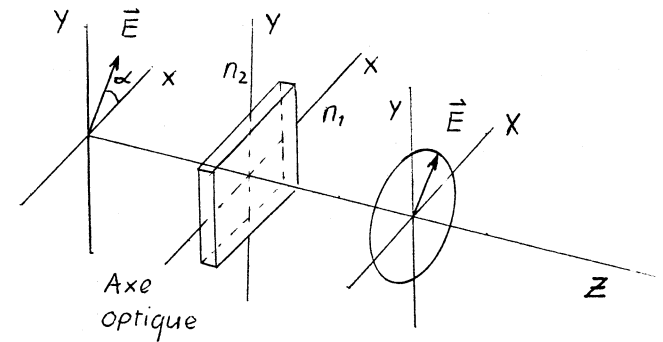
Quand une onde électromagnétique se propage dans un milieu anisotrope, la vitesse de propagation de l'onde dépend en général de la direction de propagation et de la direction de vibration de l'onde par rapport au cristal.

Le fait que la polarizabilité du milieu soit anisotrope implique que, en général, le vecteur $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ne soit pas $\parallel$ à $\vec{E}$. On peut montrer qu'il existe trois axes principaux $\perp$ le long desquels $\vec{E}$ et $\vec{D}$ sont parallèles. Les trois composantes de $\vec{D}$ pour une orientation quelconque de $\vec{E}$ s'écrivent alors :

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i ; \quad i = 1, 2, 3$$

On définit également trois indices de réfraction principaux n_1, n_2, n_3

A titre d'exemple, considérons une onde plane incidente normalement sur un échantillon mince d'une substance uniaxiale (quartz p.ex.) avec des faces parallèles à l'axe optique.



La direction y correspond à la polarisation du rayon ordinaire (indice n_2) et la direction x à celle du rayon extraordinaire (indice n_1). Le champ $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t)$ incident fait un angle α avec Ox ; on peut le décomposer selon les deux directions privilégiées :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \sin(kz - \omega t) & E_{0x} &= E_0 \cos \alpha \\ E_y &= E_{0y} \sin(kz - \omega t) & E_{0y} &= E_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Lorsque l'onde traverse le cristal, les deux composantes ne possèdent plus la même vitesse de propagation u ; la fréquence change pas et il vient :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega n_1}{c} = k n_1 & k_2 &= k n_2 \\ & & \text{ou } k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

Si l'on choisit l'origine à l'entrée du cristal ($z=0$) les champs $\vec{E}$ pour $z > d$ s'écrivent :

$$E_x = E_{0x} \sin(kz - \omega t + \phi_x) \quad \phi_x = (k_1 - k)d$$

$$E_y = E_{0y} \sin(kz - \omega t + \phi_y) \quad \phi_y = (k_2 - k)d$$

Le déphasage vaut :

$$\delta = \phi_x - \phi_y = kd(n_1 - n_2) = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 - n_2)$$

Il s'agit d'une onde polarisée elliptiquement. En effet pour z fixé, le vecteur $\vec{E}$ décrit dans le plan xy et en fonction du temps une ellipse avec la vitesse angulaire ω . Les axes de l'ellipse sont parallèles à x et y si δ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

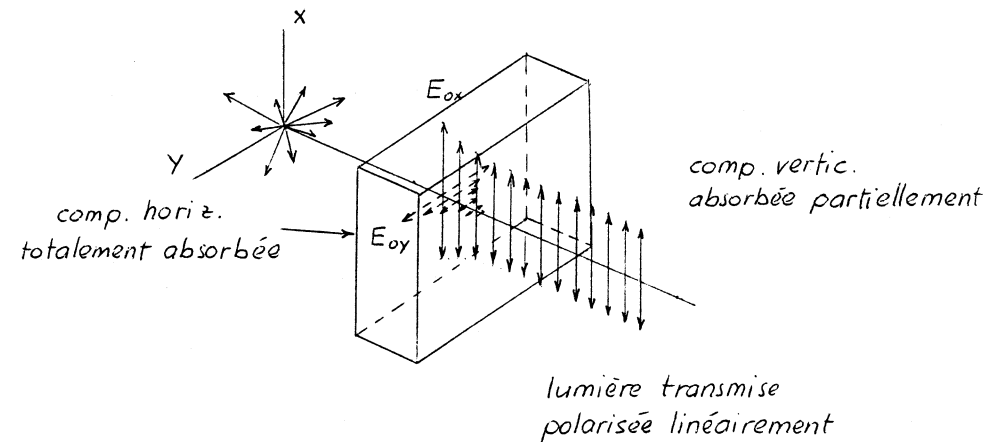
$$(n_1 - n_2)d = (\text{nombre impair}) \times \frac{\lambda}{4} \rightarrow \text{lame quart d'onde}$$

L'onde est à nouveau polarisée linéairement si δ est un multiple entier de $\pi \rightarrow$ lame demi onde

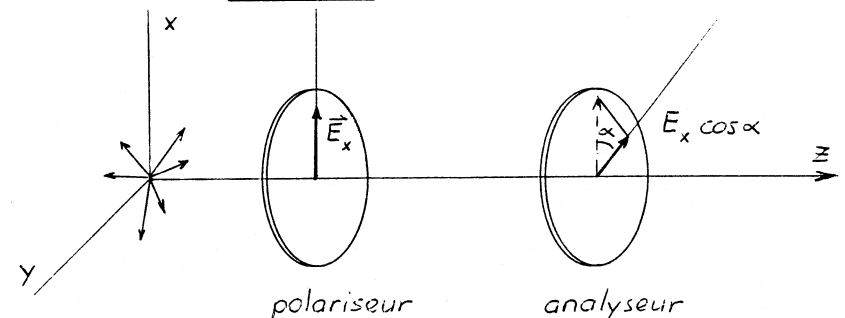
Dans le cas d'une lame quart d'onde, si en plus $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (donc $E_{0x} = E_{0y}$) la polarisation résultante à la sortie est circulaire.

Dichroïsme

Certaines substances anisotropes absorbent très différemment les rayons ordinaires et extraordinaires. Elles sont dites dichroïques. Ainsi, une onde électromagnétique polarisée de manière quelconque peut ressortir avec une polarisation dans une seule direction si la substance est assez épaisse.*



Ces substances peuvent être utilisées comme polariseur ou comme analyseur



Dans le visible il existe deux substances dichroïques particulièrement importantes:

Tourmaline (borosilicate d'aluminium), absorbe préférentiellement le rayon ordinaire

L'Héracpathite (sulfate d'iodoquine) dont les cristaux sont très cassants. Cependant la Polaroid Corporation fabrique cette substance sous l'appellation Polaroid et qui se compose d'un grand nombre de petit cristaux orientés parallèlement l'un à l'autre et maintenus entre deux feuilles de verre ou de celluloïde.

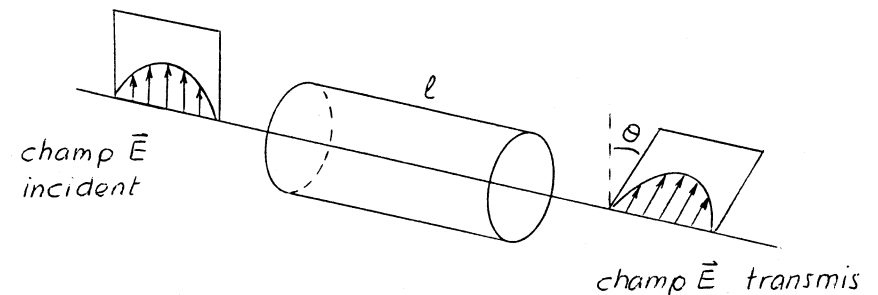
Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ a une amplitude prop. à $\vec{E}^2$. On a donc la loi de Malus:

$$|\vec{S}(\alpha)| = |\vec{S}_0| \cos^2 \alpha$$

où $\vec{S}_0$ est l'intensité incidente

Matière optiquement active

certaines corps ont la propriété de tourner le plan de polarization de l'onde EM incidente.



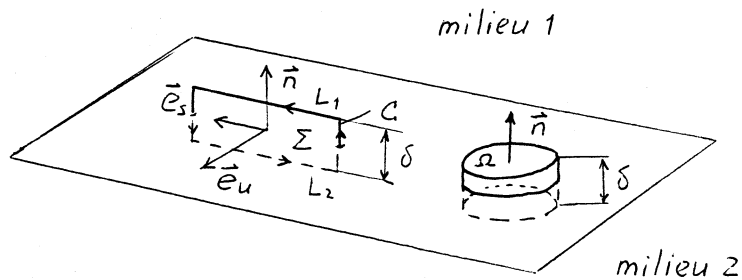
Certaines substances (quartz, cristaux organiques) ne sont optiquement actives qu'à l'état solide. D'autres (sucre, camphre, etc...) restent actives même en solution. Certaines substances deviennent actives sous l'effet d'un champ magnétique : effet Faraday

Conditions aux limites

Surface séparant deux milieux

Lors du passage brusque d'un milieu matériel à un autre, certaines composantes des champs deviennent discontinues et leurs $\vec{\text{rot}}$ et div ne sont plus définis.

Pour l'étude des conditions aux limites on considère la géométrie suivante:



Définition d'une surface et d'un volume d'intégration
On ne fait pas de supposition concernant les propriétés des milieux 1 et 2 afin d'obtenir des relations tout à fait générales.

Composante tangentielle de $\vec{E}$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_\Sigma \vec{e}_n \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\sigma$$

lorsque $\delta \rightarrow 0$, l'intégrale de droite s'annule, il subsiste :

$$\int_{L_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{e}_s ds + \int_{L_2} \vec{E}_2 \cdot (-\vec{e}_s) ds = \int_L (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{e}_s ds = 0$$

Cette relation doit être satisfaite $\forall$ le segment L . La condition à satisfaire doit être mise sous la forme :

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

Les composantes tangentielles du champ $\vec{E}$ sont continues.
Cette relation ne donne aucune information sur les composantes normales.

Composante tangentielle de $\vec{H}$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{e}_u \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) d\sigma$$

lorsque $\delta \rightarrow 0$, le terme de droite ne devient pas nécessairement nul, par suite de la présence possible d'un courant de surface $\vec{j}_\sigma$. On obtient la relation :

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_\sigma$$

Pour que les composantes tangentielles de $\vec{H}$ soient continues, il faut que la surface de séparation ne puisse pas servir de support à un courant de surface.

Composante normale de $\vec{B}$

Considérons le volume Ω lorsque $\delta \rightarrow 0$:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{B}_2 \cdot (-\vec{n}) \, d\sigma = \int_{\Sigma} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Cette relation doit être satisfaite $\forall \Sigma$ donc :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

La composante normale de $\vec{B}$ est toujours continue.

Composante normale de $\vec{D}$

semblablement :

$$\int_{\Sigma} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} \rho_s \, d\sigma$$

Cette relation doit être satisfaite $\forall \Sigma$ donc :

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

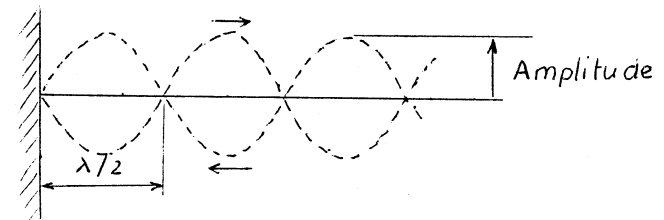
La composante normale de $\vec{D}$ ne sera continue qu'en l'absence de charges de surface.

Ondes stationnaires à une dimension

Considérons une onde transversale incidente se propageant vers la gauche d'équ. $\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx)$.

Cette onde est réfléchiée en $x=0$, donnant naissance à une nouvelle onde se propageant vers la droite d'équ. $\xi = \xi'_0 \sin(\omega t - kx)$. Il y a interférence ou superposition des deux ondes :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx) + \xi'_0 \sin(\omega t - kx)$$



de plus $\xi(x=0) = (\xi_0 + \xi'_0) \sin \omega t = 0 ; \forall t$

donc $\xi'_0 = -\xi_0$. L'onde subit un déphasage de π lorsqu'elle est réfléchiée. Ainsi :

$$\xi = \xi_0 [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]$$

et finalement :

$$\xi = 2 \xi_0 \sin kx \cos \omega t$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

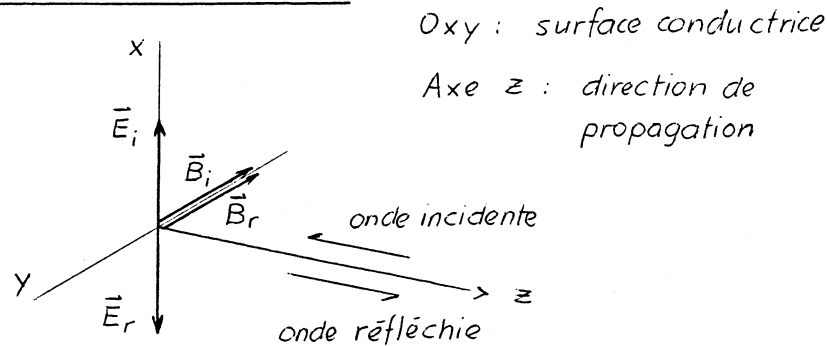
Cette expression représente un mouvement sinusoïdal dont l'amplitude varie d'un point à l'autre suivant:

$$A = 2 E_0 \sin kx$$

l'amplitude est nulle pour $x = \frac{1}{2} n \lambda$; n entier

Ces points sont appelés noeuds.

Onde EM stationnaires



En prenant l'axe z pour direction de propagation, le champ $\vec{E}$ est $\parallel$ à la surface du conducteur. Or, à la surface d'un cond. parfait le champ doit être $\perp$ au conducteur càd. ne posséder aucune comp. tangentielle. Il faut donc imposer au champ $\vec{E}$ d'être nul à la surface càd. que $\vec{E}$ de l'onde réfléchie doit être égal et opposé à celui de l'onde incidente ou $\vec{E} = 0$ pour $x = 0$.

Le champ $\vec{E}$ résultant est alors:

$$E_x = 2 E_0 \sin kx \cos \omega t$$

de la relation $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on trouve pour le champ $\vec{B}$:

$$B_y = 2 B_0 \cos kx \cos \omega t$$

$$\text{avec } B_0 = \frac{E_0 k}{\omega} = \frac{E_0}{c}$$

Il y a donc une différence de phase de $\lambda/2$ dans les variations spatiales et de $T/2$ dans le var. temporelle des deux champs. $\vec{B}$ prend son amplitude maximum à la surface.

L'expérience de Heinrich Hertz (1888)

