Le transformateur T charge les plaques C C'. Ces plaques se déchargent à travers l'éclateur P qui devient l'oscillateur dipolaire. Pour observer les ondes Hertz utilisait une spire avec un petit interstice. Si la spire est placée avec son plan $\perp$ au champ $\vec{B}$, le champ $\vec{B}$ variable induira une fém ce qui produira des étincelles à l'interstice.

Dans ces conditions, si la spire se trouve à un noeud de $\vec{B}$, elle ne présentera, quelle que soit son orientation, aucune fém induite. A un ventre de $\vec{B}$, en revanche, la production d'étincelles est la plus intense quand la spire est orientée $\perp$ à $\vec{B}$. En déplaçant la spire le long de la droite PQ. Hertz trouva la position des noeuds et des ventres ainsi que la direction de $\vec{B}$.

Les résultats de Hertz coïncident avec l'analyse théorique que nous avons donnée.

Notamment Herz a calculé la vitesse des ondes EM par $c = \lambda \cdot \frac{2\pi}{\omega}$



## VI. THEORIE DES POTENTIELS

### a) Définition de $\vec{A}$ et V

Dans le cas stationnaire le 1er couple dés équs. de Maxwell s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$
$$\vec{\operatorname{rot}}\, E = 0$$

Ces deux relations impliquent qu'il existe $\vec{A}(\vec{r})$ et $V(\vec{r})$ tel que :

$$\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \qquad (1)$$
$$\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}\, V \qquad (2)$$

Dans le cas non stationnaire le 1er couple s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad (3)$$
$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

La 1ère relation reste verifiée par contre la deuxième doit être modifiée

$$(4) \longrightarrow \quad \vec{\operatorname{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Cette relation implique qu'il existe V t.q. $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{grad}}\, V$.

Le 1er couple des équs. de Maxwell peut alors être écrit sous la forme suivante.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \qquad (5) \\ \vec{E} &= -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (6) \end{aligned}}$$

b) <u>Invariance de jauge</u>

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est défini au gradient d'un champ scalaire près ($\overrightarrow{rot}$ grad = 0). Le potentiel $V$ est défini à un champ scalaire près. Faisons la transformation

$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}'$ et $V \longrightarrow V'$

caractérisée par $\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\varphi \\ V' = V + \Theta \end{cases}$

<u>Les grandeurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont des observables qui ont une réalité physique. Elles doivent rester invariantes dans cette transformation (invariance de jauge).</u>

Or : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}' = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\,\Theta - \overrightarrow{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

L'invariance est assurée par la relation

$$\Theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + cte$$

La transformation des potentiels est donc astreinte à obéir à :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\varphi \\ V' &= V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + cte \end{aligned}}$$

La const. additive de $V'$ peut être fixée d'une manière quelconque (p. ex. par une condition à l'$\infty$)

<u>La fonct. $\varphi(x,y,z)$ est arbitraire</u> (classe C2) et l'on remarque qu'il est <u>possible de choisir une relation supplémentaire pour la déterminer</u>. Le choix d'une telle relation est appelé <u>jauge</u>.

L'indétermination qui existe d'un point de vue classique sur les potentiels est liée au fait que la force de Laplace-Lorentz s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$. Les potentiels $\vec{A}$ et $V$ n'interviennent dans la force que par l'intermédiaire des grandeurs rot $\vec{A}$ et $-\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

En mécanique quantique, les potentiels $\vec{A}$ et $V$ interviennent d'une manière directe dans l'équ. d'onde d'une particule chargée se déplaçant dans un champ EM. Ce fait discuté en détail par Feynmann [1] tend à modifier la conception classique que l'on peut avoir des potentiels.

1) The Feynmann Lectures on Physics. Vol. 2

c) Equ. dif. pour les potentiels, choix d'une relation supplémentaire

Aussi longtemps que l'on n'a pas de considérations d'ordre physique pour fixer les potentiels, on peut arbitrairement choisir une relation supplémentaire pour déterminer $\vec{A}$ et $V$.
Le choix judicieux d'une jauge peut simplifier considérablement les calculs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
Afin d'exposer quelques jauges utilisées couramment, nous allons établir en toute généralité les equ. dif. des potentiels. Le second couple des équs. de Maxwell s'écrit, dans le vide :

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_0 \, div\, \vec{E} = \rho$$

Remplaçons $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par (5) et (6) ; il vient :

$$\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{A} = \vec{j} - \varepsilon_0 \overrightarrow{grad}\, V - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$-\varepsilon_0 \, div\, \overrightarrow{grad}\, V - \varepsilon_0 \, div \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \rho$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \overrightarrow{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, div\, \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V + div \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

On peut choisir la jauge de manière à donner à ces équs. une forme particulière.

d). Relation de Lorentz

Pour rendre les équs. ci-dessus symétriques, on peut introduire la relation de Lorentz :

$$\boxed{div\, \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

On obtient ainsi pour $\vec{A}$ et $V$ des équs. du type d'Alembert Poisson.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla}^2 V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

Nous chercherons plus loin des solutions à ces équs. Remarquons que si $\vec{j} = 0$ et $\rho = 0$ les sol. sont du type ondulatoire ( vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ égale à la vitesse de la lumière). Si $\vec{j} \neq 0$ et $\rho \neq 0$ nous verrons que l'on peut développer la théorie des potentiels retardés et avancés

## e) Jauge de Coulomb

Cette jauge est caractérisée par la relation :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Les équs à considérer sont alors :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\}$$

Le potentiel $V$ est donné par une équ. de Poisson dont on connaît la solution (voir ci après).

$$V(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{\rho(\vec{x}_0, t)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \, d\omega_0$$

Par contre l'équ. dif. pour $\vec{A}$ est compliquée. Dans le cas stationnaire (ou à la limite quasi stat.) elle se réduit cependant à $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ et :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\omega_0} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \, d\omega_0$$

## f) Les potentiels dans le cas stationnaire

Lorsque $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ on a intérêt à utiliser la jauge $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Donc on a le groupe d'équs.

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Etudions par exemple l'équ. du pot. scalaire

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 V(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

Pour éviter des difficultés d'ordre mathématique, nous allons mettre l'équ. de Poisson sous forme intégrale. Calculons l'intégrale de volume de cette expression :

$$\int_{\omega} \vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 V(\vec{x}) \, d\omega = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\omega} \rho(\vec{x}) \, d\omega$$

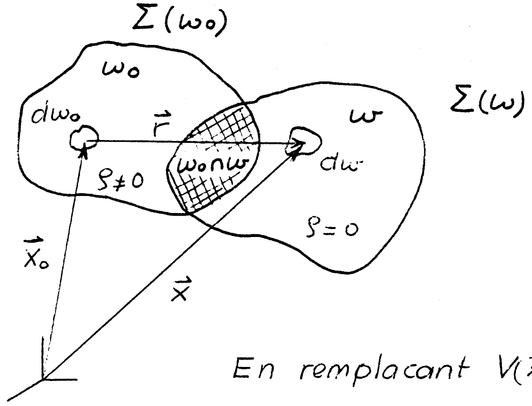
Le théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{\Sigma(\omega)} \{\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{x}} V(\vec{x})\} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\omega} \rho(\vec{x}) \, d\omega$$

Nous allons vérifier que cette équ. a pour solution :

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{\omega_0} \frac{\rho(\vec{x}_0)}{r} \, d\omega_0$$

Le volume $\omega_0$ doit contenir toutes les charges responsables du potentiel $V$.




$$\vec r = \vec x - \vec x_0$$

En remplacant $V(\vec x)$ par sa valeur, il vient:

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma(\omega)}\int_{\omega_0}\frac{\rho(\vec x_0)\,\vec r}{r^3}\,d\vec\sigma\,d\omega_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\omega}\rho(\vec x)\,d\omega$$

Par hypothèse $\rho \neq 0$ dans $\omega_0$ et $\rho = 0$ hors de $\omega_0$.

On aura donc:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'}\int_{\omega_0}\frac{\rho(\vec x_0)\,\vec r}{r^3}\,d\vec\sigma\,d\omega_0 = \int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x)\,d\omega$$

Cette équ. s'écrit aussi : $\Big\{$ $\Sigma'$ est la surface qui <u>limite</u> le volume $\omega_0\cap\omega$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'}\int_{\omega_0\cap\omega}\frac{\rho(\vec x_0)\,\vec r}{r^3}\,d\vec\sigma\,d\omega_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'}\int_{C(\omega_0\cap\omega)}\frac{\rho(\vec x_0)\,\vec r}{r^3}\,d\vec\sigma\,d\omega_0 = \int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x)\,d\omega$$

La quantité $\frac{d\vec\sigma\cdot\vec r}{r^3}$ est l'élément d'angle solide sous lequel on voit la surface élémentaire $d\vec\sigma$ de $\Sigma'$ depuis le point $\vec x_0$.

La première intégrale de la relation ci-dessus devient:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'}\int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x_0)\,d\Omega\,d\omega_0 = \int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x_0)\,d\omega_0$$

En effet le point $\vec x_0$ est à l'intérieur du volume limité par $\Sigma'$ et l'on a $\int_{\Sigma'} d\Omega = 4\pi$.

La seconde intégrale est nulle car le point $\vec x_0$ est à l'extérieur du volume limité par $\Sigma'$

On trouve donc l'identité

$$\int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x_0)\,d\omega_0 = \int_{\omega_0\cap\omega}\rho(\vec x)\,d\omega$$

et la fonction $V(\vec x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec x_0)}{r}\,d\omega_0$ est bien <u>une solution</u> de l'équ. de Poisson.

De la même manière on obtient une sol. pour le pot. vecteur:

$$\vec A(\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec j(\vec x_0)}{r}\,d\omega_0$$

### Remarque

En introduisant directement la solution pour $V(\vec{x})$ dans l'équ. $\vec{\nabla}^2_{\vec{x}} V(\vec{x}) = -\frac{\varrho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$

on obtient $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \varrho(\vec{x}_0)\,\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_0 = -\frac{\varrho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

La quantité $\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)$ est nulle partout sauf en $r=0$ où elle a une singularité. On introduit la mesure de Dirac et on est conduit à poser :

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ \text{singulière si } \vec{x} = \vec{x}_0 \end{cases}$$

avec $$\int_\omega f(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d\omega = f(\vec{x}_0) \quad \text{si } \vec{x} \in \omega$$

D'une manière générale on aura :

$$\vec{\nabla}^2 V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \varrho(\vec{x}_0)\,\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_0 = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \omega_0 \\ -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0} \text{ si } x \in \omega_0 \end{cases}$$

$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$ n'est évidemment pas une fonction au sens stricte du terme.



## g) Potentiels retardés

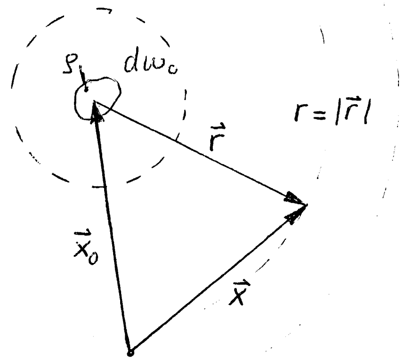
Nous avons vu que la relation de Lorentz

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

conduit aux équs. suivantes pour $V$ et $\vec{A}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{j} \end{aligned}\right\} \quad \text{voir d)}$$

Considérons un élément de volume $d\omega_0$ contenant des charges




En tout point de l'espace à l'extérieur de $d\omega_0$, la 1ère équ. se réduit à une équ. de d'Alembert. Par la symétrie même du problème, la solution qui nous intéresse est une onde sphérique. Ecrivons :

$$dV(\vec{x},t) = \frac{d\omega_0}{r} f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$$

qui correspond à une onde "centrifuge" de centre $\vec{x}_0$. Le potentiel total produit par une distribution quelconque de charge vaut alors:

$$V(\vec{x},t) = \int_{\omega_0} \frac{d\omega_0}{r}\, f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) \qquad (7)$$

Pour vérifier que cette solution peut satisfaire à l'équ. du potentiel $V$, et pour déterminer la fonct. $f$, il faut calculer $\vec{\nabla}^2 V$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ en tenant compte du fait que $f$ dépend de $\vec{x}$ (ici $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$)

Le calcul est donné en annexe, il est long mais ne présente pas de difficulté. On trouve :

$$f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \rho\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$$

où $\rho\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$ est <u>la densité de charge calculée au temps</u> $t-\frac{r}{c}$.

On peut obtenir ce résultat intuitivement de la manière suivante : imaginons par la pensée que la vitesse de la lumière $c$ tende vers l'$\infty$. La relation de Lorentz devient $\operatorname{div}\vec{A}=0$. On retrouve alors la jauge de Coulomb pour laquelle nous savons que le potentiel s'exprime de la manière suivante :

$$V(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \frac{\rho(\vec{x}_0,t)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\, d\omega_0 \,.$$

Dans les mêmes conditions, l'équ. (7) devient :

$$V(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \frac{f(\vec{x}_0,t)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\, d\omega_0$$

On est ainsi amené à identifier la fonction $f(\vec{x}_0,t)$ à la grandeur $\rho(\vec{x}_0,t)/4\pi\varepsilon_0$ ou encore :

$$f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \rho\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right).$$

Compte tenu de ce qui précède, la solution cherchée prend la forme :

$$\boxed{V^{ret}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \frac{\rho\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\, d\omega_0} \qquad (8)$$

$V^{ret}$ est appelé <u>potentiel retardé</u> car sa valeur au temps $t$ dépend de la densité de charge au temps $\left(t-\frac{r}{c}\right)$.

On aurait pu trouver une autre solution de la 1ère équ. en utilisant à la place de $f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$ une fonction $g\left(\vec{x}_0, t+\frac{r}{c}\right)$. On aboutit alors au <u>potentiel avancé</u> $V^{av}$ :

$$\boxed{V^{av}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\omega_0} \frac{\rho\left(\vec{x}_0, t+\frac{r}{c}\right)}{r}\, d\omega_0}$$

De même pour le potentiel vecteur :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}^{ret}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\omega_0} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c})}{r}\, d\omega_0 \\ \vec{A}^{av}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\omega_0} \frac{\vec{j}(\vec{x}_0, t+\frac{r}{c})}{r}\, d\omega_0 \end{aligned}}$$

Les potentiels retardés conduisent à une interprétation physique particulièrement simple des résultats. En effet, on peut écrire pour

$$\vec{A} = \vec{A}^r + \vec{A}^h$$
$$V = V^r + V^h$$

où $V^h$ et $A^h$ sont des solutions des équs. difs. sans seconds membres (équs. homogènes du type de d'Alembert). On sait que le terme $V^r$ (équ. (8)) est une somme d'ondes sphériques centrifuges émises par chaque élément de volume $d\omega_0$. Il représente le rayonnement produit par le système de charges. Le terme $V^h$ est alors une onde d'origine extérieure. On remarque qu'à très grande distance $V \simeq V^h$. On a le même résultat pour le potentiel vecteur. Imaginons par exemple une onde EM d'origine externe traversant une région de l'espace qui contient des charges.

L'interaction qui existe entre l'onde incidente et les charges provoque une variation de la densité $\rho(\vec{x},t)$ qui est responsable d'un rayonnement EM représenté par le potentiel retardé $V^r$. Un observateur reçoit alors le potentiel total $V^h + V^r$.

Un effet de ce genre se produit dans un relais passif de télévision.

## VII ONDES PLANES INDEFORMABLES EM.

En dehors de la matière dipolaire et dans une région de l'espace qui ne contient pas de charge, les phénomènes EM obéissent à des équations de d'Alembert. En effet, en utilisant la relation de Lorentz, nous avons vu que :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{VII - 1}$$

On peut donc écrire des solutions de VII-1 qui sont des <u>ondes planes de potentiels</u>

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V(\vec{r}\cdot\vec{n} - ct) \\ \vec{A} &= \vec{A}(\vec{r}\cdot\vec{n} - ct) \end{aligned}} \qquad \text{VII - 2}$$

$\vec{n}$ est un vecteur unité normal au plan de l'onde, ses composantes sont $\alpha, \beta, \gamma$ et l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Appelons : a (argument) la quantité

$$a = \vec{r}\cdot\vec{n} - ct \qquad \text{VII - 3}$$



Pour une fonction $f(a)$ on a les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(a) &= -c \frac{d}{da} f(a) \\ \frac{\partial}{\partial x} f(a) &= \alpha \frac{d}{da} f(a) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(a) &= \beta \frac{d}{da} f(a) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(a) &= \gamma \frac{d}{da} f(a) \end{aligned}} \qquad \text{VII - 3}$$

Les 3 dernières équs. permettent d'exprimer l'opérateur $\vec{\nabla}$ de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \vec{n} \frac{d}{da}} \qquad \text{VII - 4}$$

Ainsi la relation de Lorentz $\operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ devient :

$$\vec{n} \frac{d}{da} \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{d}{da} V = 0$$

ou encore $\quad \frac{d}{da}\left(\vec{n}\cdot\vec{A} - \frac{V}{c}\right) = 0 \qquad$ VII - 5

La solution de VII-5 est $\quad \boxed{\vec{n}\cdot\vec{A} = \frac{V}{c}} \qquad$ VII - 6

(à une constante additive près qui ne nous intéresse pas ici).

Pour introduire la condition VII-6 dans VII-2 il faut exprimer le vecteur $\vec{A}$ comme la somme d'une composante longitudinale $\vec{A}_L$ et d'une composante transverse $\vec{A}_T$.

$$\vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_T \qquad \text{VII-7}$$

Il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V(\vec{r}\vec{n} - ct) \\ \vec{A}_L &= \frac{\vec{n}}{c} \cdot V(\vec{r}\vec{n} - ct) \\ \vec{A}_T &= \vec{A}_T(\vec{r}\vec{n} - ct) \end{aligned}} \qquad \text{VII-8}$$

Les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ se calculent facilement à partir des potentiels. Pour cela il faut appliquer les relations:

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{n}\frac{d}{da}$$

$$\text{(VII-9)} \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{d}{da} \qquad \text{sur } \vec{A} \text{ et } V$$

1) Le champ d'induction $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ devient (avec VII-4) :

$$\vec{B} = \vec{n} \wedge \frac{d\vec{A}}{da}$$

En utilisant VII-9 on trouve

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{1}{c}\,\vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \qquad \text{VII-10}$$



2) Le champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

devient de la même manière $\vec{E} = -\vec{n}\frac{dV}{da} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Remplaçons $\frac{dV}{da}$ par $-\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\vec{A}$ par $\vec{A}_L + \vec{A}_T$

alors : $\vec{E} = \frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t}$

En tenant compte de l'équation :

$$\vec{A}_L = \frac{\vec{n}}{c} V \qquad \text{VII-11},$$

il vient après simplification :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \qquad \text{VII-12}$$

On remarque que le potentiel $V$ ainsi que la composante longitudinale du potentiel vecteur $\vec{A}$ n'interviennent pas dans l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

La relation VII-12 peut s'écrire également

$$\boxed{\vec{E} = \vec{n} \wedge \left(\vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)} \qquad \text{VII-13}$$

La comparaison de (VII-13) et de (VII-10) montre qu'il existe entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$ la relation :

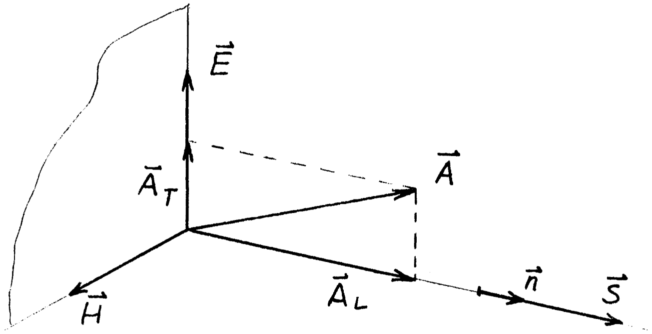
$$\boxed{\vec{E} = -c\,\vec{n} \wedge \vec{B}} \qquad \text{VII - 14}$$

Comme $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ on a également

$$\vec{E} = -\mu_0 c\,\vec{n} \wedge \vec{H}$$

On retrouve l'impédance du vide

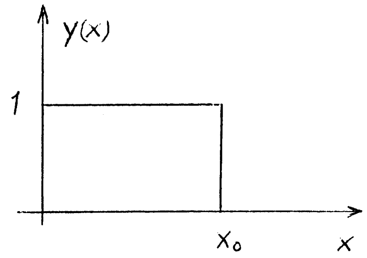
$$\boxed{Z_0 = \mu_0 c}$$






## ANNEXE 1 Mesure de Dirac

L'introduction par Haeviside de la "fonction" $y(x)$ et par Dirac de la "fonction" $\delta(x - x_0)$ nulle partout et singulière en $x = x_0$ a fourni aux ingénieurs et aux physiciens un instrument de travail d'une grande utilité.




On peut considérer $\delta$ comme la dérivée de $y$ :

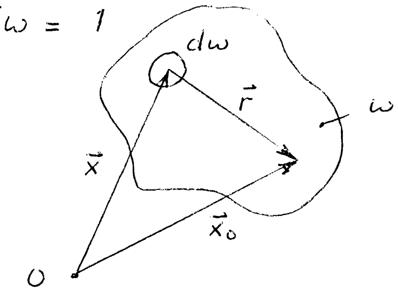
$$\delta(x - x_0) \sim -\frac{dy}{dx}$$

La mesure de Dirac peut être définie par sa propriété

$$\int_{\substack{\omega \\ \vec{x}_0 \in \omega}} f(\vec{x})\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\,d\omega = f(\vec{x}_0)$$

On en déduit l'équation :

$$\int_{\omega\ (\vec{x}_0 \in \omega)} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\,d\omega = 1$$



## Le laplacien de 1/r

Nous désirons évaluer $\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}$

alors $\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,r = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

si l'on calcule maintenant $\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r^3}$, on trouve que cette fonction est nulle partout sauf en $r=0$ où elle a une singularité. La ressemblance de $\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}$ avec l'idée que l'on peut se faire de la mesure de Dirac conduit à calculer :

$$\int_\omega \vec{\nabla}^2\frac{1}{r}\,d\omega \qquad \text{pour } \vec{x}_0 \in \omega .$$

En utilisant le théorème de la divergence, on trouve :

$$\int_\omega \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}\,d\omega = \int_{\Sigma(\omega)} \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}\,d\vec{\sigma} = -\int_{\Sigma(\omega)} \frac{\vec{r}.d\vec{\sigma}}{r^3} = -4\pi \quad \text{si } \vec{x}_0 \in \omega$$

On est conduit à poser

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\,\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)$$

Une analyse plus fouillée montre la justesse de cette intuition.



## ANNEXE 2 Les potentiels retardés

Soit $$V(\vec{x}) = \int \frac{d\omega_0}{r}\, f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$$

calculons $\vec{\nabla}^2 V$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

a) $$\vec{\nabla}^2 V = \int_{\omega_0} d\omega_0\, f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) \vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) +$$

$$+ \int_{\omega_0} d\omega_0 \left(\frac{1}{r}\right) \vec{\nabla}^2 f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) +$$

$$+ 2\int_{\omega_0} d\omega_0\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$$

or on a : $$\vec{\nabla}^2 f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$-\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

Il vient donc :

$$\vec{\nabla}^2 V = -4\pi \int_{\omega_0} d\omega_0\, f\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right) \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) +$$

$$+ \int_{\omega_0} d\omega_0 \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\vec{x}_0, t-\frac{r}{c}\right)$$

b). $$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \int_{\omega_0} d\omega_0 \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\vec{x}_0, t - \frac{r}{c}\right) =$$

$$= \int_{\omega_0} d\omega_0 \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} c^2$$

En remplacant $\vec{\nabla}^2 V$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ dans l'équ. de Poisson $\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial^2 V}{c^2 \partial^2 t} = -\rho/\varepsilon_0$, on obtient

$$- 4\pi \int_{\omega_0} d\omega_0 \; f\left(\vec{x}_0, t - \frac{r}{c}\right) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Poisson est bien satisfaite, si la fonction $F(\vec{x}, t)$ est identique à la fonction $\frac{1}{4\pi} \rho(\vec{x}, t)$