Université de Strasbourg

RELATIVITE

Licence de Physique II

Prof. J.P. Bucher

2 ème Partie

RELATIVITÉ

Introduction :

Vecteurs et formes bilinéaires

Changement de base

$E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ base

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots \tilde{E}_n$ autre base

Soit $\boxed{E_j = \sum_i t^i{}_j \tilde{E}_i}$

Explicitement :

$$(t^i{}_j) = T = \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 & \cdots & t^1{}_n \\ \vdots & & & \\ t^n{}_1 & t^n{}_2 & & t^n{}_n \end{pmatrix}$$

$$E_1 = t^1{}_1 \tilde{E}_1 + t^2{}_1 \tilde{E}_2 + \ldots + t^n{}_1 \tilde{E}_n$$

$$E_2 = t^1{}_2 \tilde{E}_1 + \ldots$$

$$\vdots$$

$$E_n = t^1{}_n \tilde{E}_1 + \ldots$$

$t^i{}_1$ composantes de E_1 dans la base $\tilde{E}_1 \ldots \tilde{E}_n$

La matrice $S = T^{-1}$

$$\boxed{\tilde{E}_i = \sum_j s^j{}_i E_j}$$

$$S = \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 & \cdots \\ s^2{}_1 & & \\ \vdots & & \\ s^n{}_1 & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{E}_1 = s^1{}_1 E_1 + s^2{}_1 E_2 + \ldots + s^n{}_1 E_n$$

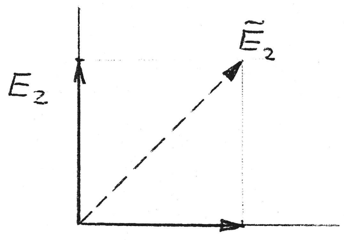
$$\tilde{E}_2 = s^1{}_2 E_1 + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\tilde{E}_n = s^1{}_n E_1 + \ldots$$

$s^j{}_1$ composantes de $\tilde{E}_1$ ds. la base $E_1 \ldots E_n$

Exemple



$\tilde{E}_1 = E_1$

$\tilde{E}_2 = E_1 + E_2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation des comp. d'un vecteur lors d'un changement de base

vecteur $\quad X = \sum_j x^j E_j = \sum_i \tilde{x}^i \tilde{E}_i$

$$= \sum_j \sum_i x^j t^i_j \tilde{E}_i = \sum_i \left(\sum_j x^j t^i_j \ \tilde{E}_i \right)$$

$$\boxed{\tilde{x}^i = \sum_j t^i_j \, x^j}$$

$$\tilde{x}^1 = t^1_1 x^1 + t^1_2 x^2 + \ \cdots \ + t^1_n x^n$$

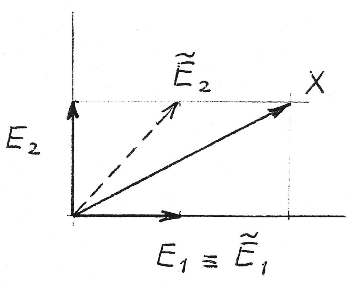
$$\vdots$$

$$\tilde{x}^n = t^n_1 x^1 + \cdots \qquad + t^n_n x^n$$

Notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_1 & \cdots & t^1_n \\ \vdots & \ddots & \\ t^n_1 & & t^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \boxed{\tilde{X} = T \, x}$$

Exemple : $\qquad X = 2E_1 + E_2 \ ; \quad X = (2, 1)$



$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = (1, 1)$$

$$X = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$$

Langage tensoriel : Tout n-uple qui se transforme selon : $\boxed{\tilde{x}^i = t^i_j \, x^j}$ est appelé un vecteur contravariant

Formes bilinéaires

$f(x,y)$: $\quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z)$

$$f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,z)$$

La matrice d'une forme bilinéaire (base $E_1 \ldots E_n$) :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum x^i E_i, \sum y^j E_j\right) = x^i y^j \underbrace{f(E_i, E_j)}_{f_{ij}} \\ &= f_{ij} \, x^i y^j \end{aligned}}$$

f_{ij} donne les composantes de f dans la base considérée

Transformation de la matrice d'une forme bilinéaire

$$f(x,y) = f_{ij} \, x^i x^j = \tilde{f}_{k\ell} \, \tilde{x}^k \tilde{x}^\ell = \tilde{f}_{k\ell} \, t^k_i x^i t^\ell_j y^j$$

$$= \left(\tilde{f}_{k\ell} \, t^k_i \, t^\ell_j \right) x^i y^j \ \rightarrow \text{ doit être vrai}$$

$\forall$ le couple x et y

Conclusion $\qquad \boxed{f_{ij} = \tilde{f}_{k\ell} \, t^k_i \, t^\ell_j}$

ou : $$\boxed{\tilde f_{k\ell} = f_{ij}\; s^i_k\; s^j_\ell}$$

Notation matricielle

$$T^t \tilde F\, T = F$$

Langage tensoriel

V esp. vect. $\quad E_j = t^i_j\, \tilde E_i$

Toute matrice qui se transforme selon la formule

$$\boxed{\tilde f_{ij}\; t^i_k\; t^j_\ell = f_{k\ell}}$$ est appelée

tenseur d'ordre 2, 2 fois covariant.

Théorème de Silvester (loi d'inertie)

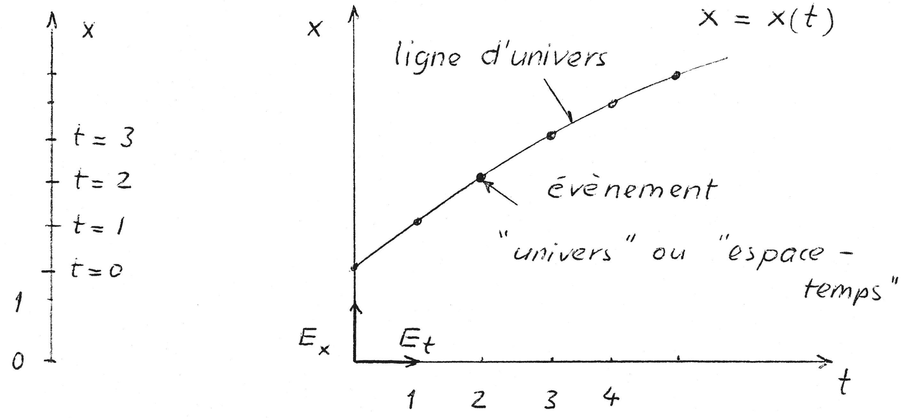
Soit f une forme bilinéaire symétrique

a) Il existe (au moins) une base dans laquelle la matrice de f a la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & O & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & O & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

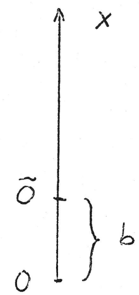
b) Si, dans une autre base, la matrice a la même forme (diag. av. des 1, des -1 et des 0), alors, le nombre de +1, -1, 0 (resp.) est le même.

I 1 Mouvement (classique) d'un point sur une droite



Un évènement : ici et maintenant (ex: flash)

L'origine se déplace



$\tilde x = x - b$

si $b = b(t) = v \cdot t$

$\boxed{\tilde x = x - vt}$ référentiel en mouvement

Cette équ. est linéaire en x et t

Interprétation dans l'espace-temps

$$\left.\begin{aligned} \tilde t &= t \\ \tilde x &= -vt + x \end{aligned}\right\} \quad \text{" Transformation de Galilée "}$$

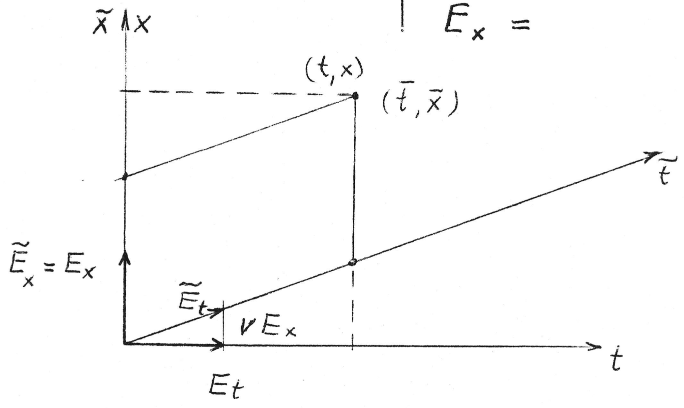
Rappel: $\quad \tilde x^i = t^i_j\, x^j \quad \leftrightarrow \quad E_j = t^i_j\, \tilde E_i$

$$t^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \qquad (t^i{}_j)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

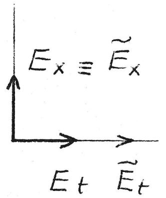
La transformation de Galilée correspond au changmt. de base suivant :

$$\begin{array}{ll|ll} E_1 = & \tilde{E}_1 - v\,\tilde{E}_2 & E_t = & \tilde{E}_t - v\,\tilde{E}_x \\ E_2 = & \tilde{E}_2 & E_x = & \tilde{E}_x \end{array}$$

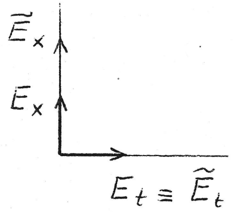
$$\begin{array}{ll|ll} \tilde{E}_i = & s^j{}_i\, E_j & \tilde{E}_t = & E_t + v\,E_x \\ & & \tilde{E}_x = & E_x \end{array}$$



Exemples d'autres changmts. de base dans l'esp.-temps



→ autres unités pour mesurer le temps



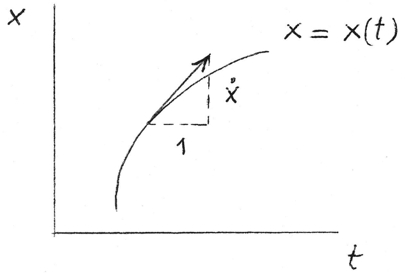
→ nvelles unités pour mesurer la long.

Remarques

(1) Motivation physique "covariance" des lois de la physique par rapport aux transformations de Galilée.

Linéarité du rapport entre (t, x) et $(\bar{t}, \bar{x})$

(2) Paramétrisation (triviale) de x



$$\left| \begin{array}{l} t = t \\ x = x(t) \end{array} \right.$$

vecteur tangent

$$\frac{d}{dt}\,(t, x(t)) = (1, \dot{x})$$

(3) Mouvement dans l'espace (t, x^1, x^2, x^3)

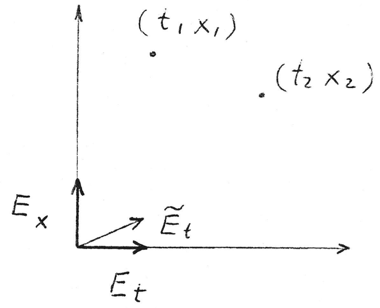
(4) Transformation de la vitesse et de l'accélération

$$\bar{t} = t \qquad \frac{d}{d\bar{t}} = \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \dot{x} - v}$$ additivité des vitesses !

$$\boxed{\frac{d^2\tilde{x}}{d\bar{t}^2} = \ddot{x}}$$ l'accélération est invariante par rap. à des transf. de Galilée.

(5) Comparaison de deux évènements



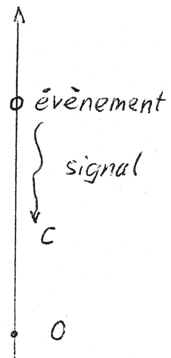
$$\tilde t_2 - \tilde t_1 = t_2 - t_1$$

$$\boxed{\bar x_2 - \bar x_1 = (-vt_2 + x_2) - (-vt_1 + x_1) = (x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}$$

La distance n'est pas un invariant

Exercice 1

Le temps $\tilde t$ est mesuré de la manière suivante : Une montre se trouve à l'origine des coordonnées. Au moment de l'évènement un signal est envoyé vers O (vitesse du signal $= c$). Le temps d'arrivée du signal est appelé $\tilde t$. La coordonnée x est mesurée "normalement". $(\tilde x = x)$. Interpréter cette façon de mesurer $\tilde x$ et $\tilde t$ comme un changement de base dans "l'espace - temps".



$$\tilde t = t + \frac{x}{c}$$
$$\tilde x = x$$

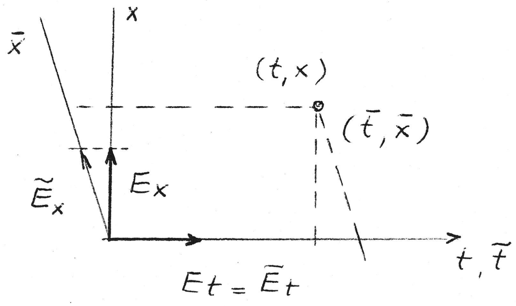
d'où $(t^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (t^i_j)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rappel : La transformation $\tilde x^i = t^i_j x^j$ est induite par le changement de base $E_j = t^i_j \tilde E_i$ (respect. $\tilde E_i = s^j_i E_j$).

$$\left| \begin{aligned} E_1 &= t^1_1 \tilde E_1 + t^2_1 \tilde E_2 \\ E_2 &= t^1_2 \tilde E_1 + t^2_2 \tilde E_2 \end{aligned} \right| \quad \text{càd} \quad \begin{aligned} E_t &= \tilde E_t \\ E_x &= \frac{1}{c} \tilde E_t + \tilde E_x \end{aligned}$$

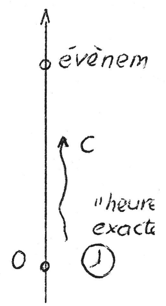
resp. $\quad \tilde E_t = E_t$

$\quad \tilde E_x = -\frac{1}{c} E_t + E_x$



Exercice 2

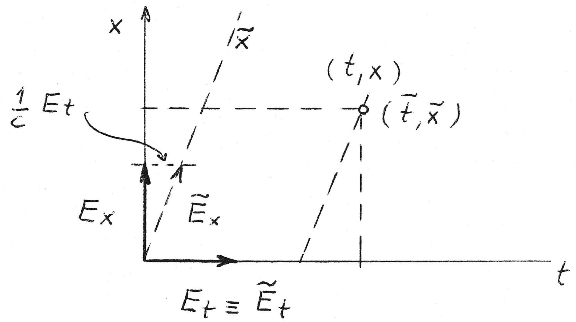
Le temps $\tilde t$ d'un évènement est mesuré comme suit : "L'heure exacte" est diffusée à partir de O (vitesse c). L'observateur se trouve près de l'évènement ; il note comme temps $\tilde t$ le temps qu'il reçoit de "l'heure exacte".



Interpréter cette situation comme un changement de coordonnées dans l'espace-temps.

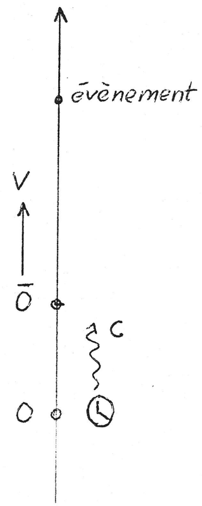
$$\left.\begin{aligned}\tilde t &= t - \frac{x}{c}\\ \tilde x &= x\end{aligned}\right\} \text{ d'où : } (t'^i_j) = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{c}\\ 0 & 1\end{pmatrix} ; \ (t'^i_j)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{c}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où : $\left|\begin{aligned} E_t &= \tilde E_t\\ E_x &= -\frac{1}{c}\tilde E_t + \tilde E_x\end{aligned}\right|$ resp. $\begin{aligned}\tilde E_t &= E_t\\ \tilde E_x &= \frac{1}{c}E_t + E_x\end{aligned}$



Exercice 3

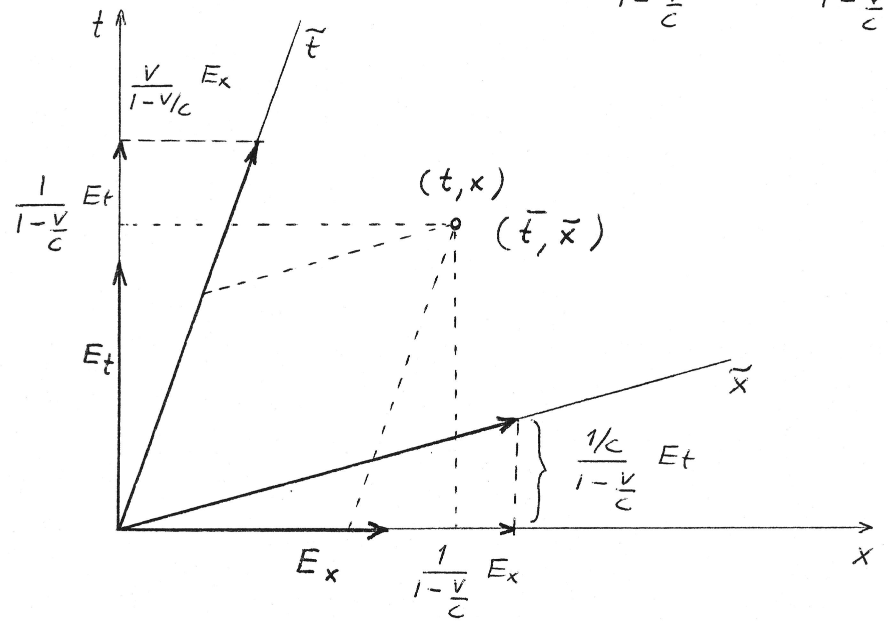
Soit : (t,x) les coordonnées "normales" d'un évènement. Soit $\bar x$ la coordonnée par rapport à une origine $\bar O$ qui se déplace avec une vitesse v. Une "horloge parlante" émet à partir de O. $\bar t$ est le temps indiqué par un récepteur situé près de l'évènement. Interpréter l'expérience comme changement de coordonnées.



$$\left.\begin{aligned}\bar t &= t - \frac{1}{c}x\\ \bar x &= -vt + x\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \quad T = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{c}\\ -v & 1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{1-\frac{v}{c}}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{c}\\ v & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}E_t &= \tilde E_t - v\tilde E_x\\ E_x &= -\frac{1}{c}\tilde E_t + \tilde E_x\end{aligned}\right\} \text{ et } \quad \begin{aligned}\tilde E_t &= \frac{1}{1-v/c}E_t + \frac{v}{1-v/c}E_x\\ \tilde E_x &= \frac{1/c}{1-\frac{v}{c}}E_t + \frac{1}{1-\frac{v}{c}}E_x\end{aligned}$$



I 2. L'intervalle : un invariant, transformation de Lorentz

- Vitesse de la lumière = c = constante.
  v. exp. de Michelson (PHYSIQUE).

- L'intervalle : $\sqrt{(ct)^2 - x^2}$ d'un évènement est un invariant (par rapport à un changement de réf. d'inertie ayant la "même origine"

$$t = 0 \ ; \ x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{t} = 0 \ ; \ \tilde{x} = 0$$

Dans "l'espace - temps" il existe une forme quadratique dont l'expression dans tout réf. d'inertie est $(ct)^2 - x^2$

La transformation de Lorentz

(1) Hypothèse : un changement de réf. d'inertie induit une transformation linéaire des coordonnées (x, t) d'un évènement

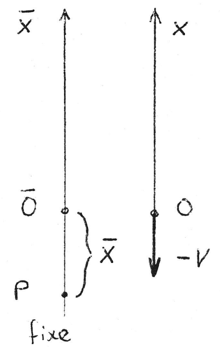
$$\left.\begin{aligned} \tilde{t} &= \alpha t + \beta x \\ \tilde{x} &= \gamma t + \delta x \end{aligned}\right\}$$

sans démonstration mathématique (Physique).

(2) Soit (Ox) un référentiel d'inertie, $(\bar{O}\tilde{x})$ est aussi un réf. d'inertie si et seul. si $\bar{O}$ a une vitesse const. ds. (Ox).

(3) $c^2t^2 - x^2 = c^2\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2$ invariant pour tout référentiel d'inertie

1 er pas trouver α et γ



évènement : passage de O en P

coordonnées : dans (Ox) : $(t, 0)$

dans $(\bar{O}\tilde{x})$: $(\tilde{t}, \tilde{x})$

où $\tilde{x} = -v\tilde{t}$

Pour cet évènement

$$\left|\begin{aligned} \tilde{t} &= \alpha t \\ \tilde{x} &= \gamma t \end{aligned}\right| = -v\tilde{t} = -\alpha v t \qquad \boxed{\gamma = -\alpha v}$$

aussi juste en physique classique !

Invariance de l'intervalle

$$c^2\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t^2$$

$$c^2\alpha^2t^2 - \alpha^2v^2t^2 = c^2t^2$$

$$\alpha^2(c^2 - v^2) = c^2$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

d'où :

$$\boxed{\gamma = -\alpha v = \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{\sqrt{}}\, t + \beta x \\ \tilde{x} &= \frac{-v}{\sqrt{}}\, t + \delta x \end{aligned}}$$

2ème pas — trouver β et δ

Invariance de l'intervalle pour un évènement quelconque

$$c^2\bar{t}^2 - \tilde{x}^2 = c^2t^2 - x^2$$

$$c^2\left(\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{2\beta tx}{\sqrt{}} + \beta^2x^2\right) - \left(\frac{v^2\cancel{t^2}}{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2v\delta tx}{\sqrt{}} + \delta^2x^2\right)$$

$$= \cancel{c^2t^2} - x^2$$

$$\beta c^2 + v\delta = 0 \longrightarrow \beta = -\frac{v\delta}{c^2}$$

$$c^2\beta^2 - \delta^2 = -1 \longrightarrow \frac{v^2\delta^2}{c^2} - \delta^2 = -1$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{\beta = -\frac{v\delta}{c^2} = \frac{-v^2/c^2}{\sqrt{}}}$$

Transformation de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, t + \frac{-v/c^2}{\sqrt{}}\, x \\ \tilde{x} &= \frac{-v}{\sqrt{}}\, t + \frac{1}{\sqrt{}}\, x \end{aligned}}$$

$$(t'_j) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

$$(t'_j)^{-1} = s^j_i = \frac{1}{\sqrt{}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

Le changement de base induisant les transformations de LORENTZ

$$\left.\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{\sqrt{}}\tilde{E}_t - \frac{v}{\sqrt{}}\tilde{E}_x \\ E_x &= -\frac{v/c^2}{\sqrt{}}\tilde{E}_t + \frac{1}{\sqrt{}}\tilde{E}_x \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde E_t &= \frac{1}{\sqrt{\ }} E_t + \frac{v}{\sqrt{\ }} E_x \\ \tilde E_x &= \frac{v/c^2}{\sqrt{\ }} E_t + \frac{1}{\sqrt{\ }} E_x\end{aligned}\right\}$$

Interprétation géométrique

$$\boxed{\begin{aligned} c\tilde t &= \frac{1}{\sqrt{\ }}\, ct + \frac{-v/c}{\sqrt{\ }}\, x \\ \tilde x &= \frac{-v/c}{\sqrt{\ }}\, ct + \frac{1}{\sqrt{\ }}\, x \end{aligned}}$$

$t^* = ct$

$\tilde t^* = c\tilde t$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \tilde t^* \\ \tilde x \end{pmatrix} = T^* \begin{pmatrix} t^* \\ x \end{pmatrix}}$$

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\ }} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde E_{ct} &= \frac{1}{\sqrt{\ }} E_{ct} + \frac{v/c}{\sqrt{\ }} E_x \\ \tilde E_x &= \frac{v/c}{\sqrt{\ }} E_{ct} + \frac{1}{\sqrt{\ }} E_x\end{aligned}\right\}$$

Composantes de $\tilde E_{ct}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{\ }} ; \frac{v/c}{\sqrt{\ }} \right)$

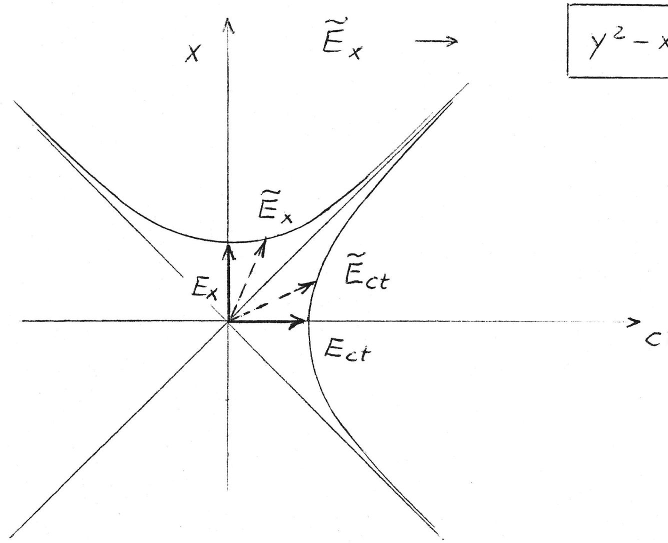
" $\tilde E_x$ $\left(\frac{v/c}{\sqrt{\ }} ; \frac{1}{\sqrt{\ }} \right)$

si v : paramètre

$$\tilde E_{ct} \left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\ }} \\ y &= \frac{v/c}{\sqrt{\ }} \end{aligned} \right| \begin{aligned} &(\ ..\ )^2 \\ &(\ ..\ )^2 \end{aligned} \qquad \boxed{x^2 - y^2 = 1}$$

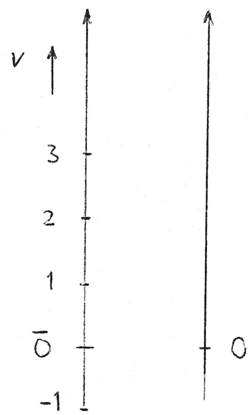
hyperbole

$\tilde E_x \longrightarrow$ $\boxed{y^2 - x^2 = 1}$



I 3 Un référentiel en mouvement :

"les apparences sont trompeuses"



Comment apparaît le réf. $(\bar O \bar x)$ à un "observateur" $(O x)$?

Expérience N°1

Au moment $\tilde t = 0$ des "flashes" sont déclanchés en $\tilde x = 0, \pm 1, \pm 2$, etc... Que voit l'obs. qui se trouve dans l'ancien système?

Evènements : $(\tilde t = 0, \tilde x = 0)$ $(\tilde t = 0, \tilde x = 1)$ ...
$(\tilde t = 0, \tilde x = -1)$

Transformation de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \frac{v/c^2}{\sqrt{}}\,\tilde x \\ x &= \frac{1}{\sqrt{}}\,\tilde x \end{aligned}}$$

$\tilde t$	$\tilde x$	t	x
0	-1	$-\frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}$	$-\frac{1}{\sqrt{\ }}$
0	0	0	0
0	1	$\frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}$	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$
0	2	$2\,\frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}$	$\frac{2}{\sqrt{\ }}$
0	3	$3\,\frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}$	$\frac{3}{\sqrt{\ }}$

La simultaneité n'est pas maintenue ; mauvaise notion
→ à écarter

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\sqrt{\ }} > 1$$

Les évènements sont observés en des points distants > 1.

Expérience N°2

(1) Déclenchons une suite de flashes en $\tilde x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ qui paraît simultanée en (Ox).

(2) Quelle est la distance observée entre deux flashes ?

$t = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde t &= \frac{-v/c^2}{\sqrt{}}\,x \\ \tilde x &= \frac{1}{\sqrt{}}\,x \end{aligned}}$$

$\tilde x_1 = 1$ ⋮ $\tilde x_k = k$ — d'où $x_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\cdot 1$ ⋮ $x_k = \sqrt{\ }\; k$

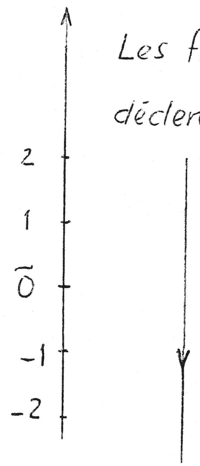
$\sqrt{\ } < 1$

→ c'est la contraction de Lorentz

reprenons: $\tilde t_1 = \frac{-v/c^2}{\sqrt{\ }}\, x_1 = -v/c^2$

$\tilde t_k = \qquad = -(v/c^2)\,k$

Les flashes doivent être déclenchés aux moments : $\boxed{\tilde t_k = -k\,\frac{v}{c^2}}$



$\tilde t_2 = -2v/c^2$

$\tilde t_1 = -v/c^2$

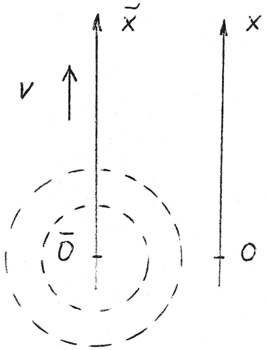
$\tilde t_0 = 0$

$\tilde t_{-1} = v/c^2$

ordre dans lequel il faut déclencher les flashes (mèche).

L'observation d'une "règle en mouvement" se fait sous l'hypothèse (qque fois implicite) qu'elle "émette" d'une manière continue. On observe des signaux émis à différents moments.

Expérience N° 3



En $\tilde{x} = 0$ sont déclanchés des flashes avec une période $\tilde{T} = 1$

($\tilde{t} = \; \dots \; -2, -1, 0, 1, 2 \; \dots$)

Evènements : $(\tilde{x} = 0 \,;\, \tilde{t} = -1)$

$(\tilde{x} = 0 \,;\, \tilde{t} = 0)$

$(\tilde{x} = 0 \,;\, \tilde{t} = 1)$

$\tilde{x} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{\ }}\,\tilde{t} \\ x &= \frac{v}{\sqrt{\ }}\,\tilde{t} \end{aligned}\right\}$$

$\tilde{t}$	t	
-2	$-2/\sqrt{\ }$	$)\ T$
-1	$-1/\sqrt{\ }$	$)\ T$
0	0	
1	$1/\sqrt{\ }$	$\vdots$
2	$2/\sqrt{\ }$	

Période observée T

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$$ "dilatation du temps"

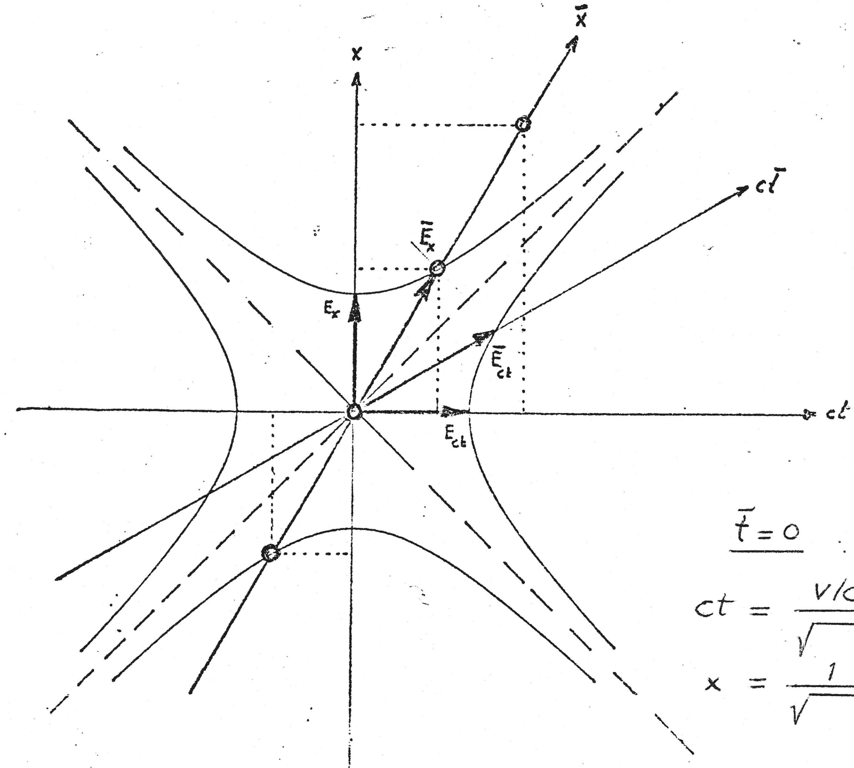
Les évènements sont observés en

$$x = \frac{-2v}{\sqrt{\ }} \,,\; \frac{-v}{\sqrt{\ }} \,,\; 0 \,,\; \frac{v}{\sqrt{\ }} \,,\; \dots$$

Exercices

I.3. Un référentiel en mouvement

① (voir : Expérience 1) Au moment $\bar{t} = 0$ des "flashes" "ont lieu" en $\bar{x} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Qu'est-ce qu'on observe dans le système $(0x)$? Faire une étude graphique (qualitative). Recommandation : introduire les variables ct et $c\bar{t}$.



$\bar{t} = 0$

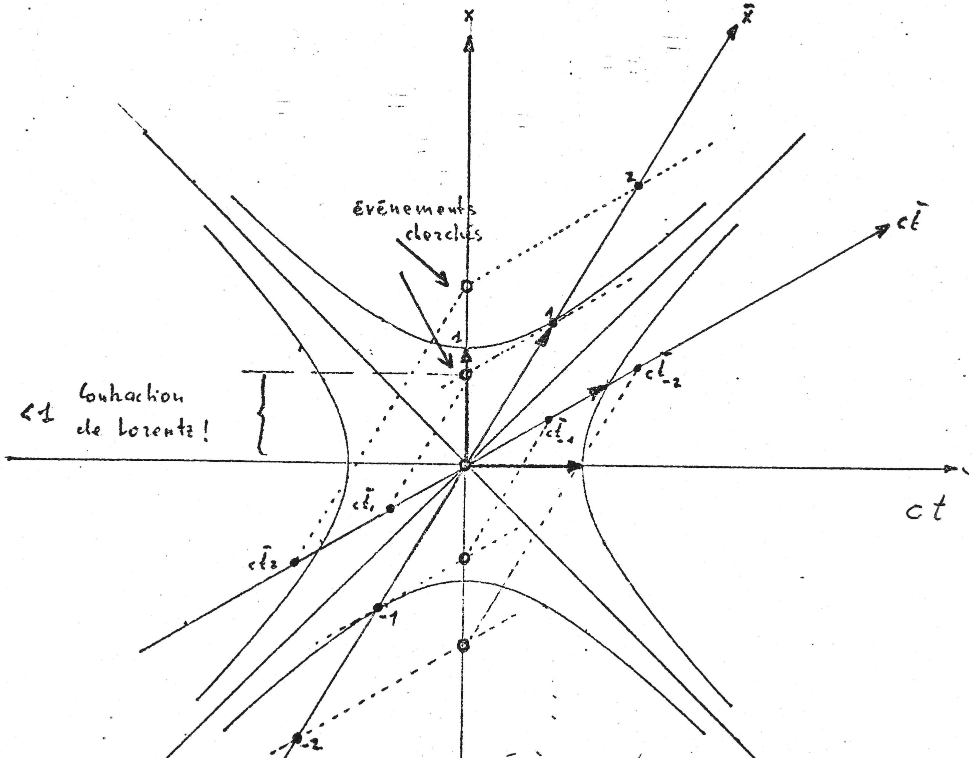
$$ct = \frac{v/c}{\sqrt{\ }}\,\bar{x}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\ }}\,\bar{x}$$

axe ct : on observe une suite de "flashes"

axe x : la "distance" entre deux évènement est > 1 dans le système $(0x)$.

② (voir expérience 2b) Des évènements ont lieu en $\bar{x} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Trouver le temps $\bar{t}_k$ correspondant à chaque évènement tel que ces évènements paraissent simultanés par rapport au système (Ox). Quel est la "distance" des évènements en (Ox) ? (Étude qualitative, graphique seulement).



évènement :

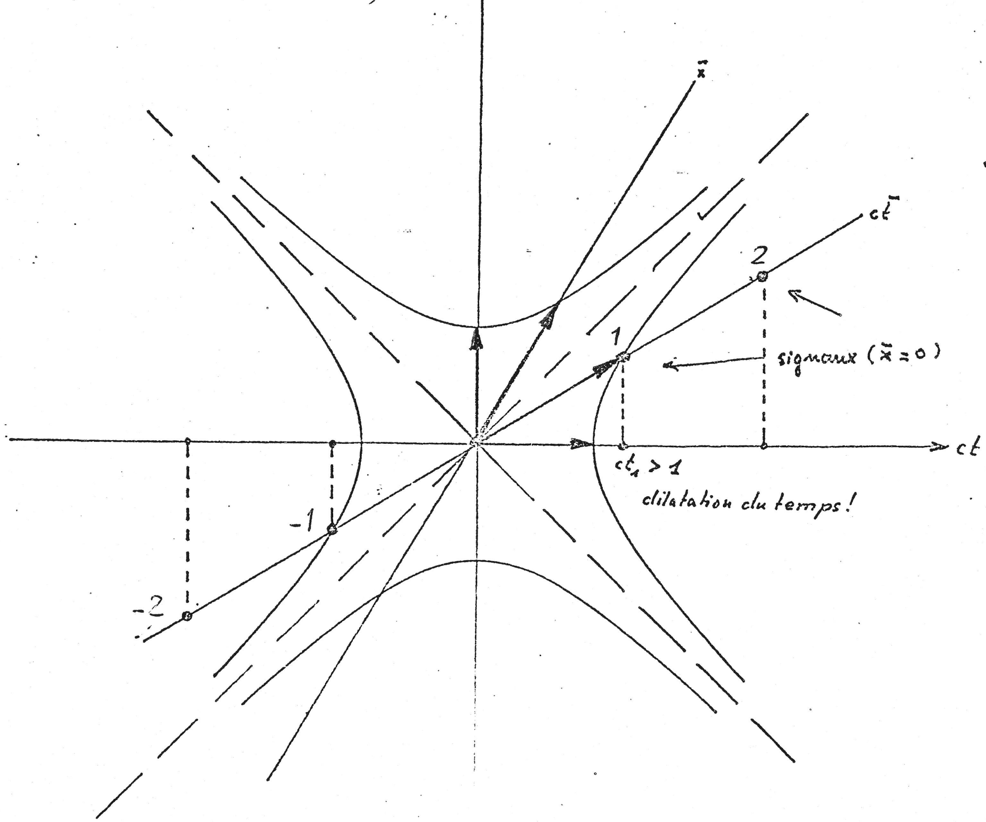
$$c\tilde{t} = \frac{-v/c}{\sqrt{}}\, x$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{}}\, x$$

③ (voir expérience 3) Un émetteur en mouvement émet des signaux avec une période T = 1. Observer ces évènements dans le système Ox. (étude qualitative, graphique).

évènement

$(\bar{x} = 0,\ \bar{t} = 0, \pm 1, \pm 2 \ \ldots)$



I. 4 L'univers relativiste

Rappel : Forme quadratique

Soit $f(x,y)$ bilinéaire symétrique, alors $q(x) = f(x,x)$ est la forme quadratique induite par f.

Proposition Une forme bilinéaire symétrique est déterminée par sa forme quadratique associée

$x^t A y$; sym : $f(x,y) = f(y,x)$

Démonstration : voir exercice

"L'univers" et sa forme quadratique

"univers" $\equiv$ "espace-temps"

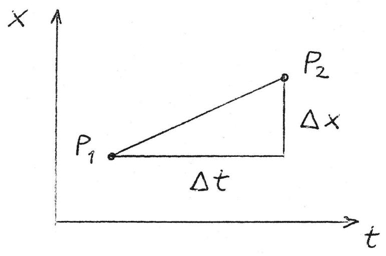
(1) Esp. vectoriel : évènements P ; vecteur $\vec{OP}$.

Dans un référentiel d'inertie, les composantes de $\vec{OP}$: (t, x) signifient temps et distance de P par rapport à l'évènement O mesuré "classiquement".

(2) Forme bilinéaire dont la matrice pour tout réf. d'inertie est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'intervalle "entre" deux évènement

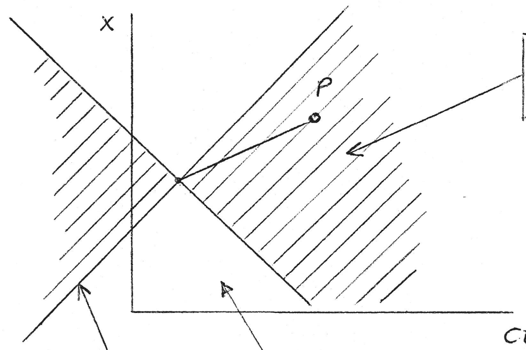


$c^2(\Delta t)^2 - \Delta x^2$ invariant

$(\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2$

aussi invariant

Classification des intervalles



$\boxed{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0}$

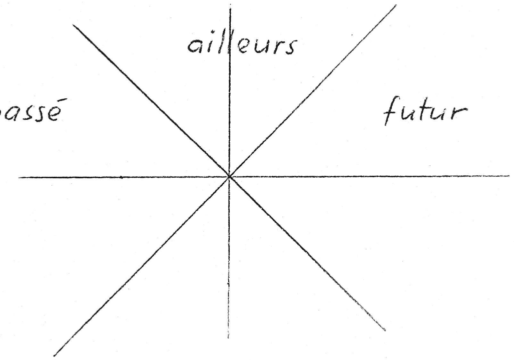
int. du genre temps

$\boxed{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0}$

int. du genre espace

$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$

int. "isotrope"



Notations :

Pour un intervalle du genre temps:

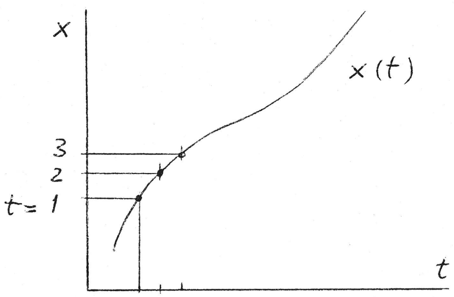
$$\Delta T = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2}$$ " temps propre " ou " temps local "

intervalle du genre espace :

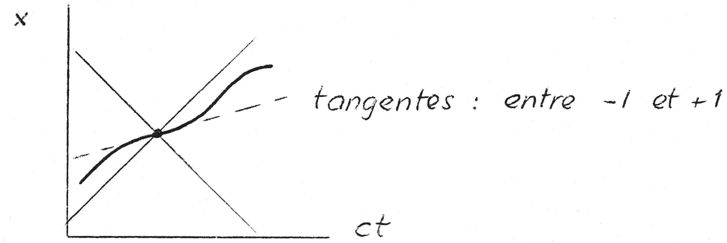
$$\Delta G = \sqrt{(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2}$$ distance propre

"Ligne d'univers"

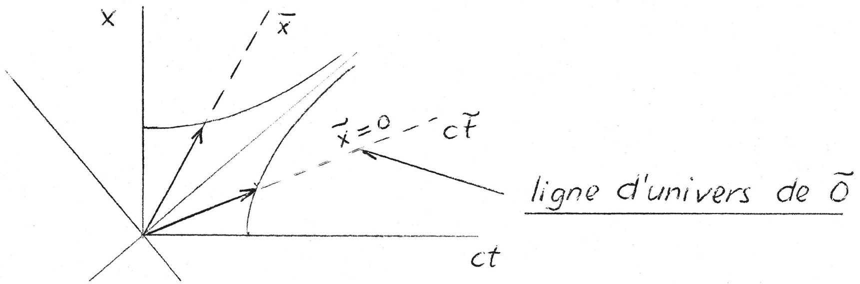
graphe



Ligne d'univers d'un point matériel



Ligne d'univers de l'origine d'un réf.



Signification du "temps propre" de l'origine

a) dans le système (Ox), 2 évèn. $(0,0)$; $(\Delta t, 0)$

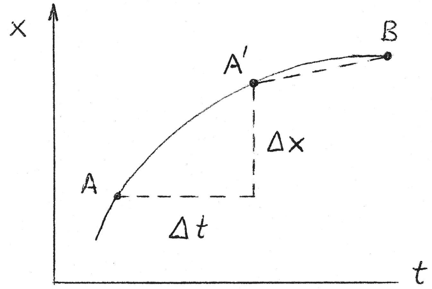
$$\Delta T = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2} = \Delta t$$

b) ... $(O\tilde{x})$

$$\Delta T = \Delta\tilde{t}$$

Le temps propre d'un point immobile (par rapport à un réf. d'inertie) correspond au temps Δt mesuré (dans le même référentiel).

Paramétrisation des lignes d'univers par le temps propre



$$\Delta T_{AA'} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}\ \Delta t$$

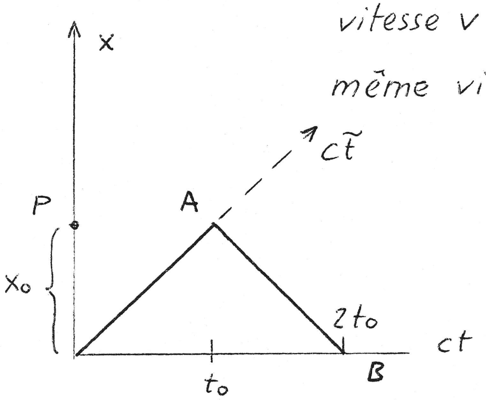
$$\boxed{T_{AB} = \lim \sum \Delta T = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\ dt}$$

Signification physique du temps propre T_{AB} : temps mesuré par une horloge (idéale) dont l'arc $\widehat{AB}$ est la ligne d'univers.

τ comme paramètre : $\quad \tau(\underline{t}) = \displaystyle\int_{cte}^{\underline{t}} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\, dt$

τ_{AB} est invariant par rapport à des changements de référentiels d'inertie

<u>Exemple</u> Un point se déplace de O à P avec une vitesse $v = \frac{c}{2}$, puis il revient avec la même vitesse. Temps propre écoulé ?



$$v = \frac{c}{2} = \frac{x_0}{t_0} \longrightarrow \underline{t_0 = \frac{2x_0}{c}}$$

$$\tau_{OAB} = 2\,\tau_{OA}$$

$$\Delta\tau_{OA} = \tilde{t}_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\,t_0 + \frac{-1/2c}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\,x_0$$

$$= \frac{4}{c\sqrt{3}}\,x_0 - \frac{2}{2c\sqrt{3}}\,x_0 = \frac{1}{c\sqrt{3}}\,3x_0 = \sqrt{3}\,\frac{x_0}{c}$$

Comparer avec t_0

$$\boxed{\frac{\tilde{t}_A}{t_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}86\ldots}$$

ce n'est pas un paradoxe ! voir aussi les muons

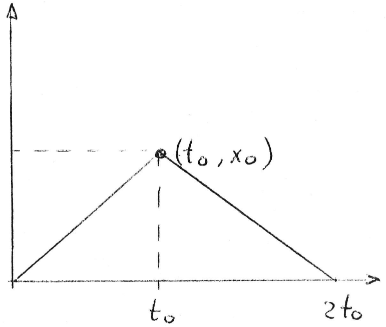
Exercice 1

Montrer graphiquement et algébriquement que si :

- l'intervalle d'un évènement satisfait à l'inégalité $c^2t^2 - x^2 > 0$ (l'év. est situé dans le "futur" par rapport à l'origine O), alors pour tout référentiel d'inertie l'év. a lieu après O.
- $c^2t^2 - x^2 < 0$ pour un évènement ("ailleurs"), alors on peut choisir des référentiels d'inertie pour lesquels l'év. a lieu resp. avant, simultanément, après O.

Exercice 2

Paradoxe des jumeaux — Un astronaute quite la terre avec une vitesse $v = \frac{12}{13} c$. Il voyage pendant 5 ans (selon son horloge), puis il rentre avec la même vitesse. En partant il avait 30 ans en arrivant donc 40 ans. Quel est l'age de son frère jumeau lors de son retour ?



$$\frac{x_0}{t_0} = \frac{12}{13} c \quad \text{d'où : } \quad x_0 = \frac{12}{13} c t_0$$

$$(\Delta T)^2 = 5^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 =$$

$$= (t_0)^2 - \left(\frac{12}{13} t_0\right)^2 =$$

$$= t_0^2 \left(\frac{169 - 144}{169}\right) = t_0^2 \ \frac{25}{169}$$

d'où : $\quad t_0 = \frac{13}{5} \, \Delta T = 13$ ans

$2 t_0 = 26$ ans : son frère aura 56 ans

distance parcourue :

$$x_0 = \frac{12}{13} c \, \frac{13}{5} \, \Delta T = \frac{12}{5} c \, \Delta T = 12 \text{ années lum.}$$

(éloignement max.)

I.5 La notion de vitesse

La formule de la "composition des vitesses"

mouvement unif. $\quad x = ut \quad$ d'où $\quad \bar{x} = \bar{u} \bar{t}$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{}} t - \frac{v/c^2}{\sqrt{}} ut \quad = \frac{1}{\sqrt{}} \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right) t$$

$$\bar{x} = \frac{-v}{\sqrt{}} t + \frac{1}{\sqrt{}} ut \quad = \frac{1}{\sqrt{}} (-v + u) t$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} \qquad \boxed{\bar{u} = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}}$$

$$\text{ou : } \qquad \boxed{u = \frac{\bar{u} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \bar{u}}}$$

→ formule de transformation des vitesses

Remarque : u et $\bar{u}$ sont des grandeurs physiques !
v se rapporte au changement de base

"Non additivité" des vitesses

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_1}$$

$u_3 = u_1 + u_2$

$\bar{u}_3 = \ ?$

$$\bar{u}_2 = \frac{u_2 - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_2}$$

$$\bar{u}_3 = \frac{u_1 + u_2 - v}{1 - \frac{v}{c^2}(u_1 + u_2)}$$

$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \neq u_3$ en général, v. ex.

Critique de la notion de vitesse

1) $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ Le quotient des composantes d'un vecteur $\binom{x}{y}$ n'est pas un invariant.

2) $\overset{\swarrow}{\bar{u}} = \frac{\overset{\swarrow}{u} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$ aucune grandeur raisonnable ne se transforme de cette manière

Le "vecteur vitesse"

Rappel : $x^i(t)$ trajectoire, alors $\dot{x}^i$ est un vecteur

Ligne d'univers :

$$\left| \begin{array}{l} t = t(\tau) \\ x = x(\tau) \end{array} \right|$$

$\uparrow$ param. → temps pr.

Composantes du vecteur vitesse U

Définition :

$$\boxed{U^0 = \frac{dt}{d\tau} \qquad U^1 = \frac{dx}{d\tau}}$$

Expression des composantes de U en fct. de t

(ligne d'univers donnée $x = x(t)$)

$$\boxed{U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \neq 0}$$

$$\boxed{U^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}}$$

Expression de $\dot{x}$ par les comp. de U

$$(U^1)^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = \dot{x}^2 \qquad (U^1)^2 = \dot{x}^2 \left(1 + \frac{U^{1\,2}}{c^2}\right)$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{U^1}{\sqrt{1 + \frac{(U^1)^2}{c^2}}}}$$

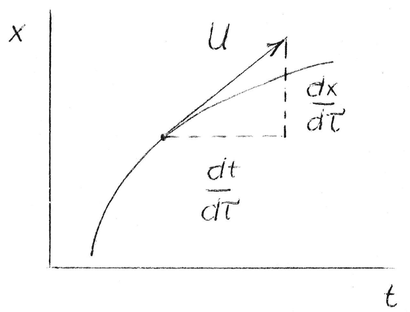
La "valeur absolue" de U

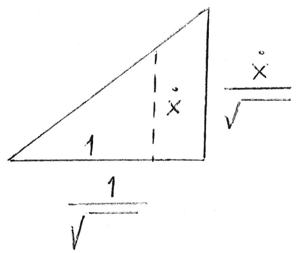
$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \qquad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2}{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{(U^0)^2 - \frac{1}{c^2}(U^1)^2} = \frac{1}{\sqrt{}}\left(\sqrt{}\right) = 1}$$

la vitesse est du genre temps !

Interprétation graphique du vecteur U





Transformation des composantes du vecteur vitesse U

$$\boxed{\begin{pmatrix} \bar U^0 \\ \bar U^1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \end{pmatrix}}$$

Transformation de $\dot x$

$$\bar t = \frac{1}{\sqrt{\ }}\, t - \frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}\, x \qquad \text{si } x = x(t) \quad \text{ss. forme trad.}$$

$$\bar x = \frac{-v}{\sqrt{\ }}\, t + \frac{1}{\sqrt{\ }}\, x$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$d\bar t = \frac{1}{\sqrt{\ }}\, dt - \frac{v/c^2}{\sqrt{\ }}\, \frac{dx}{dt}\,.\, dt$$

$$d\bar x = \frac{-v}{\sqrt{\ }}\, dt + \frac{1}{\sqrt{\ }}\, \frac{dx}{dt}\,.\, dt$$

$$\boxed{\frac{d\bar x}{d\bar t} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}}$$

Même formule que pour les vitesses constantes.

Le "vecteur accélération"

définition : $\boxed{A = \frac{d}{d\tau}\, U}$

$$(a^0, a^1) = \left(\frac{dU^0}{d\tau}, \frac{dU^1}{d\tau} \right) = \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}, \frac{d^2 x}{d\tau^2} \right)$$

Expression des composantes de A par $x(t)$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{1}{\frac{d\tau}{dt}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot x^2}{c^2}}}\, \frac{d}{dt}$$

$$a^0 = \frac{d}{d\tau}\, U^0 = \frac{1}{\sqrt{\ }}\, \frac{d}{dt}\, \frac{1}{\sqrt{\ }} = \frac{\dot x \ddot x / c^2}{\left(1 - \frac{\dot x^2}{c^2}\right)^{3/2} \sqrt{\ }}$$

$$\boxed{a^0 = \frac{1}{c^2}\, \frac{\dot x \ddot x}{\left(1 - \frac{\dot x^2}{c^2}\right)^2}}$$

$$\boxed{a^1 = \frac{1}{\sqrt{\ }}\, \frac{d}{dt}\, \frac{\dot x}{\sqrt{\ }} = \frac{\ddot x}{\left(1 - \frac{\dot x^2}{c^2}\right)^2}}$$

Valeur absolue de A

$$\boxed{\|A\|^2 = {a^0}^2 - \frac{1}{c^2}\, {a^1}^2 = \frac{\ddot x}{c^2\left(1 - \frac{\dot x^2}{c^2}\right)^4}\, \underbrace{\left(\frac{\dot x^2}{c^2} - 1\right)}_{<0} < 0}$$

genre espace

Orthogonalité entre U et A

$$\boxed{U^0 a^0 - \frac{1}{c^2} U^1 a^1 = \frac{\dot{x}\ddot{x}}{c^2(\quad)^{5/2}} - \frac{\dot{x}\ddot{x}}{c^2(\quad)^{5/2}} = 0}$$

Transformation des valeurs $\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{x}} \quad \Big| \leftarrow \frac{d}{dt} \qquad ; \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)\ddot{x} - \frac{v}{c^2}\ddot{x}(\dot{x} - v)}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(1 - v^2/c^2)\ddot{x}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\quad}} - \frac{v/c^2}{\sqrt{\quad}}\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^3}\ddot{x}}$$

Formule compliquée car l'acc. n'est pas une "bonne notion".

II 1. Le principe fondamental de la mécanique

Impulsion $\quad P = mU \qquad$ vitesse U : vecteur

masse m : scalaire

principe fond. $\quad \boxed{\frac{dP}{d\tau} = F}$

on ne peut pas démontrer cette loi : expérience

En composantes :

$$\boxed{p^0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}} \quad \boxed{p^1 = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}}$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dp^0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\,mU^0}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{m\dot{x}\ddot{x}}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2} = f^0$$

$$\boxed{\frac{dp^1}{d\tau} = \frac{dp^1}{dt}\frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{m\ddot{x}}{\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2}} = f^1$$

La composante f^1 et les équs. du mouvement

$$f^1 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{\quad}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{\quad}}\right)\frac{dt}{d\tau}$$