

Orthogonalité entre U et A

$$U^0 a^0 - \frac{1}{c^2} U^1 a^1 = \frac{\dot{x} \ddot{x}}{c^2 \left(\right)^{5/2}} - \frac{\dot{x} \ddot{x}}{c^2 \left(\right)^{5/2}} = 0$$

Transformation des valeurs $\frac{d^2 x}{dt^2}$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \dot{x}} \left| \leftarrow \frac{d}{dt} \right. ; \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} &= \frac{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right) \ddot{x} - \frac{v}{c^2} \ddot{x} (\dot{x} - v)}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^2} \\ &= \frac{(1 - v^2/c^2) \ddot{x}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{\gamma} - \frac{v/c^2}{\gamma} \dot{x}$$

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right)^3} \ddot{x}$$

Formule compliquée car l'acc. n'est pas une "bonne notion".

II 1. Le principe fondamental de la mécanique

Impulsion $\underline{P = m U}$

vitesse U : vecteur
masse m : scalaire

principe fond.

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = F}$$

on ne peut pas démontrer cette loi : expérience

En composantes :

$$\boxed{p^0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \quad p^1 = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dp^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d(mU^0)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{m \dot{x} \ddot{x}}{c^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2} = f^0$$

$$\boxed{\frac{dp^1}{d\tau} = \frac{dp^1}{dt} \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{m \ddot{x}}{\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2} = f^1}$$

La composante f^1 et les éq. du mouvement

$$f^1 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \right) \frac{dt}{d\tau}$$

$$\boxed{f^1 \sqrt{\quad} = \frac{d}{dt} \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\quad}}, \text{ si } \dot{x} \ll c : \boxed{f^1 = \frac{d}{dt} m \dot{x}}}$$

On voit quelquefois :

$$\boxed{M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}}$$

masse variable
masse apparente
masse relativiste

$$\frac{m \dot{x}}{\sqrt{\quad}} = M \dot{x} \quad \text{"impulsion relativiste"} \quad (3 \text{ dim.})$$

$$\boxed{f_{\text{rel}}^1 = \frac{f_{\text{class}}^1}{\sqrt{\quad}}}$$

$$\boxed{f_{\text{class}}^1 = \frac{d}{dt} (M \dot{x})}$$

La composante f^1 et la conservation de l'énergie

nous avons trouvé A orth. à U au sens de l'intervalle

$$(A, U) = 0$$

$$a^0 u^0 - \frac{1}{c^2} a^1 u^1 = 0 \quad | \times m \rightarrow$$

$$f^0 u^0 - \frac{1}{c^2} f^1 u^1 = 0 \quad \begin{cases} u^0 = \frac{1}{\sqrt{\quad}} \\ u^1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\quad}} \end{cases}$$

$$f^0 = \frac{1}{\sqrt{\quad}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{\quad}} \right) \}$$

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{\quad}} \right) = \frac{1}{c^2} f^1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\quad}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{\quad}} \right) = \sqrt{\quad} f^1 \dot{x} \quad \} \quad \dot{x} dt = dx$$

$$\boxed{d \left(\frac{m c^2}{\sqrt{\quad}} \right) = \sqrt{\quad} f^1 dx} = f_{\text{class}}^1 dx$$

travail de la force

↑
accroissement de l'énergie

Définition :

$$\boxed{E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \quad \text{Energie (rel.) totale de la particule}}$$

Les composantes p^0 et f^0

$$\boxed{p^0 = m u^0 = \frac{m}{\sqrt{\quad}} = \frac{E}{c^2}}$$

La composante p^0 de P représente "essentiellement" l'énergie totale de la particule

P : vecteur énergie - impulsion

$$f^0 = \frac{d}{d\tau} p^0 = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{d\tau}$$

Rem: l'énergie totale d'une particule n'est pas un invariant; dépend du référentiel.

La valeur absolue du vecteur impulsion

$$\|P\| = \|mU\| = m \underbrace{\|U\|}_1 = m \quad \text{masse au repos}$$

Cas particulièrement simple: chocs élastiques

Hypothèse: additivité de l'impulsion

$$P_{\text{système}} = \sum_i P_i$$

Choc: force externes = 0 $\Rightarrow \frac{dP}{d\tau} = 0$

$$P = \text{const}$$

2 conséquences $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conservation de la partie spatiale} \\ \text{de l'impulsion} \\ \text{Conservation de l'énergie } E \end{array} \right.$

Exercices sur:

Le principe fondamental de la mécanique

1). Démontrer la formule suivante pour la composante f^0 du vecteur F :

$$f^0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}{c^2} f^1 u^1$$

p: ex: $f^1 \cdot u^1 = \frac{m \ddot{x}}{\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}{c^2} f^1 u^1 = \frac{m \dot{x} \ddot{x}}{c^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^2} = f^0$$

2). Une particule de masse m est accélérée par une force constante f ($= f^1_{\text{classique}}$)

(i) Trouver $v(t)$ et $a(t)$ (esquisse pour $\frac{f}{m} = 1$)

(ii) Trouver $t(\tau)$ et $x(\tau)$

$$f = \frac{d}{dt} \frac{m \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \quad \text{implique} \quad f \cdot t = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

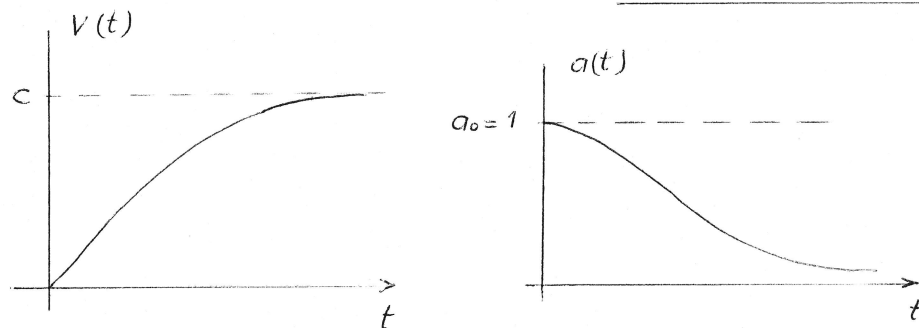
$$f^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 v^2$$

$$f^2 t^2 = v^2 \left(m^2 + \frac{f^2 t^2}{c^2} \right)$$

d'où

$$v(t) = \frac{ft}{\sqrt{m^2 + \frac{f^2 t^2}{c^2}}} = \frac{f}{m} \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{f^2 t^2}{c^2 m^2}}}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{f}{m} \frac{\sqrt{1 - \frac{f^2 t^2 / c^2 m^2}{1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2}}}{1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2} = \frac{f}{m} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2\right]^{3/2}}$$



(ii) $d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2$ $\tau = \int \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt$

en utilisant $\dot{x}(t) = \frac{f}{m} \frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2}}$ on trouve :

$$\tau(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2}}$$

d'où :

$$\tau(t) = \frac{mc}{f} \operatorname{Arsh} \left(\frac{ft}{mc} \right)$$

et

$$t(\tau) = \frac{mc}{f} \operatorname{sh} \left(\frac{f\tau}{mc} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{f}{m} \frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{cm}\right)^2}} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{f\tau}{mc} \right) = \\ &= \frac{f}{m} \frac{mc}{f} \operatorname{sh} \left(\frac{\tau f}{mc} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\frac{dx}{d\tau} = c \operatorname{sh} \left(\frac{f\tau}{mc} \right)$	$\frac{dt}{d\tau} = \operatorname{ch} \left(\frac{f\tau}{mc} \right)$
--	--

II 2. Energie, impulsion, masse

Energie totale, énergie au repos, énergie cinétique

$$E_{\text{totale}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{\dot{x}^4}{c^4} + \dots\right)$$

$$E_{\text{tot}} = \underbrace{mc^2}_{E_0} + \underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3m}{8} \frac{\dot{x}^4}{c^2} + \dots}_T$$

E_0 : énergie au repos

T : énergie cinétique ; $\frac{m\dot{x}^2}{2}$: én. cin. class.

En. cin. $T = E - E_0 = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} - 1 \right]$

Rapport entre masse, énergie, impulsion

$$\|P\|^2 = m^2 \quad ; \quad \|P\| = (p^0)^2 - \frac{1}{c^2} (p^1)^2 \quad ; \quad p^0 = \frac{E}{c^2}$$

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{(p^1)^2}{c^2}$$

↑
invariant

E, p^1 dépendent du réf. choisi, la dif ne dép. plus du référentiel.

$$E^2 = c^2 (m^2 c^2 + (p^1)^2)$$

développement pour E :

Cas 1 : petites vitesses (poser $p^1 = p$)

$$E = \underbrace{mc^2}_{E_0} + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

$\searrow$
 $\frac{m\dot{x}^2}{2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \approx \frac{m\dot{x}^2}{2}$

énergie $\approx$ $c^2 \cdot$ masse + én. cin

Cas 2 : grandes vitesses

$$E^2 = c^2 p^2 \left(1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}\right)$$

$$E = cp + \frac{m^2 c^3}{2p} + \dots$$

une "plus grande partie" de l'én. tot. se retrouve dans l'impulsion. La masse n'a que peu d'importance

Relation entre impulsion et énergie

$$p^1 = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \quad \quad E = c^2 p^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

en éliminant la masse

$$p^1 = \frac{E}{c^2} \dot{x}$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} E/c^2 \\ E\dot{x}/c^2 \end{pmatrix}$$

"Particule" ayant la vitesse c $\dot{x} = c$

$$p^1 = \frac{E}{c} \rightarrow \boxed{E = cp^1} \quad \text{toute l'én. est comprise dans l'impulsion}$$

$$m^2 = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (p^1)^2 = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{E}{c}\right)^2 = 0$$

La masse d'une telle particule est nulle et:

$$P: \left(\frac{E}{c^2}, \frac{E}{c} \right) \quad \text{Un objet sans masse peut avoir une impulsion différente de zéro}$$

exemple: pression lumineuse

Variation de la masse

Questions:

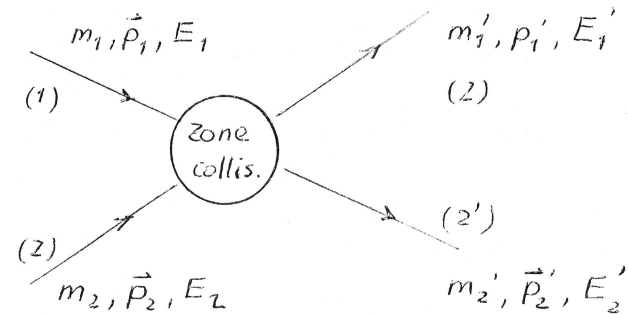
Peut on libérer l'énergie mc^2 ?

est ce qu'alors la masse diminue ?

Peut on augmenter E_0 ?

II. 3 Collisions

Lorsque deux particules s'approchent l'une de l'autre, leur interaction modifie leur mouvement en produisant un échange d'impulsion et d'énergie. On dit alors qu'il y a eu collision. Dans certaines collisions (nucléaires, réactions chimiques ...) les particules finales ne sont pas identiques aux particules initiales. Lorsque les particules initiales et finales sont les mêmes on parle de diffusion.



L'impulsion totale et l'énergie totale sont conservées ds. toutes les collisions

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_2^2} = c\sqrt{m_1'^2 c^2 + p_1'^2} + c\sqrt{m_2'^2 c^2 + p_2'^2}$$

A partir de ces éq̄s. il est possible de trouver les impulsions finales des particules en terme des impulsions initiales. L'algèbre est plutôt compliquée.

Rappelons que $E = T + mc^2$, où T est l'énergie cinétique :

$$T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2 = T_1' + m_1' c^2 + T_2' + m_2' c^2$$

En introduisant Q , le changement de l'énergie cin. durant la collision :

$$Q = (T_1' + T_2') - (T_1 + T_2) = (m_1 + m_2 - m_1' - m_2') c^2.$$

Q changmt. de l'én. au repos durant la collision

$Q = 0$ l'én. cin. est conservée ds. la collision (élastique)

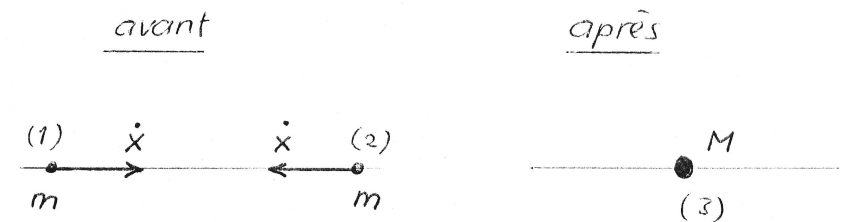
$Q < 0$ décroissance de l'én. cin. (masse ↗)

(collision inélastique 1er type)

$Q > 0$ accroissement de l'én. cin. (masse ↘)

(collision inélastique 2ème type)

Exemple : Choc non élastique



$$\left. \begin{array}{l} \text{corps (1)} \quad P_{(1)} = \left(\frac{m}{\sqrt{\quad}}, \frac{m\dot{x}}{\sqrt{\quad}} \right) \\ \text{corps (2)} \quad P_{(2)} = \left(\frac{m}{\sqrt{\quad}}, \frac{-m\dot{x}}{\sqrt{\quad}} \right) \end{array} \right\}$$

$$P_{(1)} + P_{(2)} = \left(\frac{2m}{\sqrt{\quad}}, 0 \right)$$

$$\text{corps (3)} \quad P_{(3)} = (M, 0)$$

$$P_{(1)} + P_{(2)} = P_{(3)} \quad :$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} > 2m$$

Bilan :

Energie cinétique (disparue) Accroissement de la masse

$$\Delta T = -\frac{2mc^2}{\sqrt{\quad}} + 2mc^2$$

$$\Delta M = 2m \left(\frac{1}{\sqrt{\quad}} - 1 \right)$$

$$= -2mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\quad}} - 1 \right)$$

$$\Delta T = -c^2 \Delta M$$

II 3. L'effet Doppler

L'effet doppler pour les ondes EM doit être discuté séparément parce que leur vitesse de propagation est "c" et reste la même pour tous les observateurs indépendamment de leurs mouvement relatifs.

Pour un observateur dans un repère d'inertie, une onde EM plane et harmonique peut être décrite par une fonction de la forme

$$\sin(kx - \omega t)$$

ω : pulsation

$\vec{k}$: vecteur d'onde $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT}$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Pour un observateur attaché à un autre repère d'inertie $\bar{O}x$, les coord. x et t doivent être remplacées par $\bar{x}$ et $\bar{t}$. Il écrira pour sa description $\sin(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t})$

Par ailleurs, le principe de relativité demande que :

$$kx - \omega t = \bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}$$

En utilisant les TLs réciproques on a :

$$k \frac{\bar{x} + v\bar{t}}{\sqrt{\quad}} - \omega \frac{\bar{t} + \frac{v\bar{x}}{c^2}}{\sqrt{\quad}} = \bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}$$

ou :

$$\frac{k - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{\quad}} \bar{x} - \frac{\omega - kv}{\sqrt{\quad}} \bar{t} = \bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}$$

Par suite :

$$\bar{k} = \frac{k - \omega v/c^2}{\sqrt{\quad}} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega - kv}{\sqrt{\quad}}$$

Si l'on tient compte de $\omega = ck$, on peut écrire chacune de ces équs. sous la forme :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{\quad}}$$

Pour de faibles vitesses c.à.d. $v \ll c$:

$$\bar{\omega} = \omega (1 - v/c)$$

En admettant O au repos par rapport à la source des ondes EM, nous voyons que si la source O et l'observateur $\bar{O}$ s'éloignent l'un de l'autre, $\bar{O}$ observe une fréquence inférieure ou une long.

d'onde correspondante supérieure. Ce phénomène s'observe dans le spectre des étoiles, il est appelé "déplacement vers le rouge". Puisque le spectre visible de la lumière venant des étoiles est déplacé vers la longueur d'onde limite supérieure (dans le rouge). Cette donnée nous permet d'estimer la vitesse d'éloignement de ces étoiles.

NB : Nous avons établi l'expression de $\tilde{\omega}$ en appliquant le principe de relativité à la phase $kx - \omega t$. Vérifions si notre raisonnement est cohérent en appliquant la TL à l'énergie et à l'impulsion du photon.

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda$$

On peut montrer que

$$\tilde{p} = \frac{p - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{E} = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En utilisant $\tilde{E} = h\tilde{\nu}$, $\tilde{p} = h/\tilde{\lambda} = h\tilde{\nu}/c$

$$\tilde{\nu} = \nu \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En multipliant les deux termes par 2π et en réintroduisant $\omega = 2\pi\nu$, on voit que l'on retrouve l'expression pour $\tilde{\omega}$ d'avant.

Nous pouvons donc conclure que le concept de photon est presque une exigence découlant du principe de relativité. c.à.d. que si $E = cp$ et $\omega = ck$ sont simultanément valables, une correspondance du type $E \rightarrow \omega$ ou ν

et $p \rightarrow k$ ou $1/\lambda$ s'impose.

Si un physicien avait utilisé cette ligne de recherche, le concept de photon se serait de toute manière dégagé comme une nécessité théorique.

Si la direction de propagation d'une onde électromagnétique plane fait un angle Θ avec la direction du mouvement relatif des deux observateurs O et $\tilde{O}$, il faut écrire :

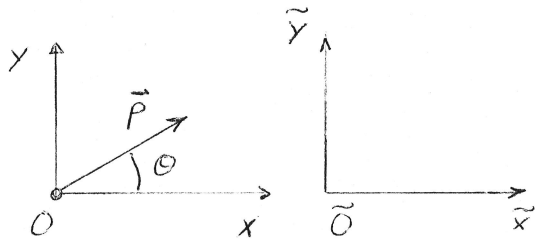
$$\tilde{E} = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{ou} :$$

$$\tilde{E} = \frac{E - vp \cos \Theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E \frac{1 - (v/c) \cos \Theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En introduisant $E = h\nu = h\omega/2\pi$ on obtient :

$$\tilde{\omega} = \omega \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Discuter la relation entre les directions de propagation d'une onde EM plane telles que les déterminent deux observateurs en mouvement relatif. Cet effet est nommé aberration.



On suppose : une source au repos par rapport à l'obs. O.

L'observateur dans O voit une onde EM qui se propage dans une direction faisant un angle θ avec l'axe x , qui coïncide avec la direction du mouvement relatif des deux obs. On a :

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p_x = p \cos \theta \quad \text{pour } O$$

$$\tilde{p}_x = \tilde{p} \cos \tilde{\theta} \quad \text{pour } \tilde{O}$$

En introduisant $E = cp$ on obtient :

$$\tilde{p} \cos \tilde{\theta} = p \frac{\cos \theta - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Si nous tenons compte de $p = h/\lambda = h\omega/2\pi c$ et de la relation équivalente pour $\tilde{p}$:

$$\tilde{\omega} \cos \tilde{\theta} = \omega \frac{\cos \theta - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

cette relation lie les directions de propagation d'une onde EM déterminée par les deux observateurs.

En effet, en combinant cette expression avec celle obtenue avant $\tilde{\omega} = \omega \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, on obtient :

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{\cos \theta - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

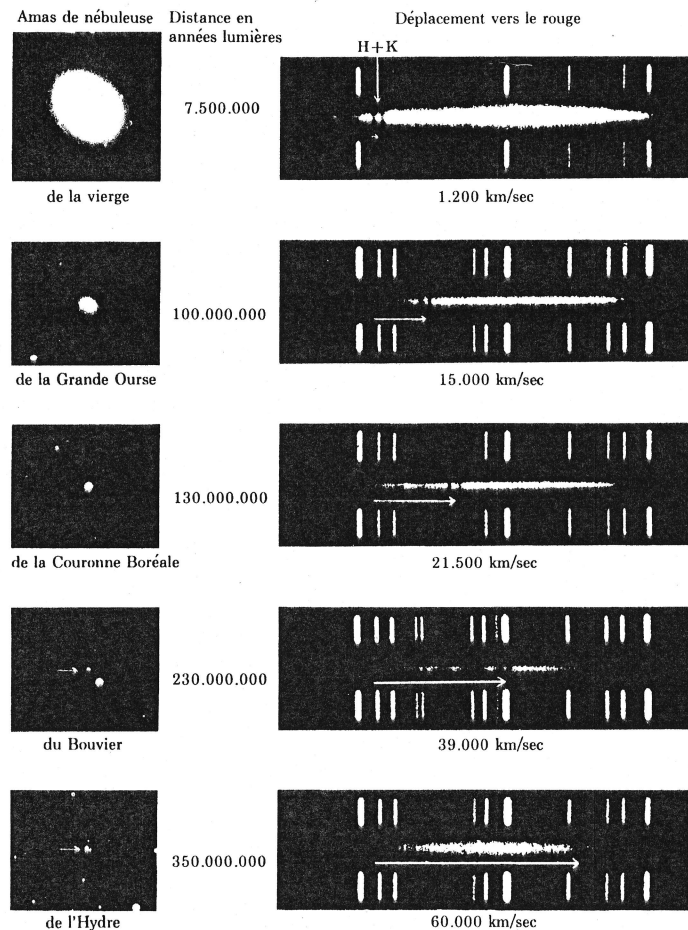


Fig. 19-31. Effet Doppler dans les nébuleuses extragalactiques. Le déplacement vers le rouge des raies spectrales H et K du calcium (indiqué par la flèche) augmente avec la distance de la nébuleuse, ce qui suggère des vitesses d'éloignement de plus en plus grandes. (Photos aimablement communiquées par les observatoires du Mt. Wilson et du Mt. Palomar)

III Confirmations expérimentales

1). Durée de vie des particules

Les particules radioactives se désintègrent suivant la loi :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N(t)$: nb. de particules présentes à t .

N_0 : $N(t=0)$, nb de particules présentes en $t=0$

λ : const. $=(\ln 2)/T$

T : temps au bout duquel le nb de particules a décru d'un fact. 2.

Donc :

$$\frac{N(t+T)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda(t+T)}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T} \equiv \frac{1}{2}$$

exemple : T quasi ∞ pour le proton

$T \approx 10^{-24} s$ pour l'état excité du proton

Entre ces deux extrêmes, le méson K^+ a une période T_0 de $0,86 \cdot 10^{-8} s$. Il se désintègre en deux autres mésons π^+ et π^0 :



Supposons que l'on ait produit 1000 méson K^+

à $t=0$, alors, il n'en reste plus que :

500 au bout de $0,86 \cdot 10^{-8} s$

250 " " $1,72 \cdot 10^{-8} s$

etc ... quasiment zéro après $10^{-7} s$

$P(t) = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$: probabilité d'existence de la particule au temps

$$P(t) = e^{-t/\tau}$$

τ : durée de vie moyenne de la particule

$$\tau = \tau_0 = \frac{T_0}{\ln 2} = 1,237 \cdot 10^{-8} s$$

Lorsque τ est mesuré dans "O" où K^+ est au repos

$\tau = \tau_0$. Mais dans un référentiel où la particule

n'est pas au repos, l'intervalle de temps τ , qui

sépare l'instant de sa naissance de celui de sa

mort sera plus long que τ_0 :

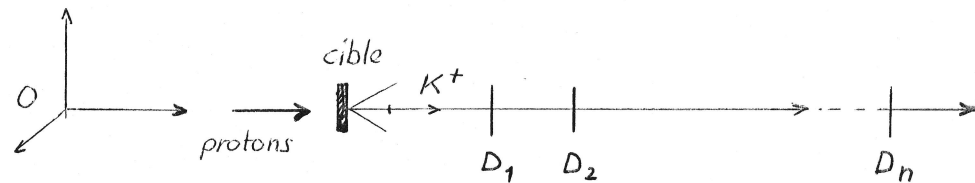
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{où } v = \text{vitesse de } \tilde{O}/O$$

Considérons un référentiel lié au laboratoire dans

lequel on produit des mésons K^+ en envoyant des

protons accélérés sur une cible au repos. Supposons que les mésons K^+ qui sortent de la cible dans une direction donnée aient tous la même vitesse v par rapport au réf. du labo. Alors si v est tel que $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,1$, les mésons K^+ se comporteront comme s'ils avaient une vie moyenne $\tilde{\tau} = \tau_0 \cdot 10 = 1,237 \cdot 10^{-7} s$.

On le vérifie expérimentalement en disposant, le long de la trajectoire des K^+ , des détecteurs permettant de les dénombrer au fur et à mesure de leur progression en ligne droite avec la vitesse v (ou encore en dénombrant les mésons π^+ et π^0 qui signent la mort d'un méson K^+).



Chiffrons l'effet pour $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,1 \rightarrow v = 0,995 c$

Supposons que, à $t=0$, on a produit 1000 K^+ en

direction des détecteurs avec $v \approx c$.

Dans le réf. du labo, pendant $\Delta t = 10 \times 0,86 \cdot 10^{-8} s$,

les K^+ parcourent $\Delta \ell = v \Delta t \approx c \Delta t \approx 26 \text{ m}$.

Un détecteur placé à cette distance de la cible dénombrera environ 500 K^+ .

Si la durée de vie des K^+ dans le labo était la même que leur durée de vie au repos τ_0 , alors ce détecteur n'en dénombrerait pratiquement aucun: ils se seraient désintégrés en π^+ et π^0 . C'est dans un détecteur disposé à 2,6 m de la cible qu'on en dénombrerait 500.

⇒ L'expérience tranche en faveur de la relativité de la notion de durée.

Et cela de façon quantitative en accord avec les prédictions de la relativité restreinte

2). Des horloges atomiques à bord d'un avion

La plus courte durée de l'intervalle de temps propre (par rapport aux intervalles de temps impropres) entraîne qu'un voyageur vieillit moins vite qu'un observateur qui assiste à son déplacement. Cet effet est réel, mais n'est sensible que pour un voyageur très rapide ($v \approx c$). Voir avant.

Paradoxe des jumeaux ou du voyageur de Langevin

Le paradoxe apparaît lorsque le jumeau de la fusée considère que son jumeau voyage sur une fusée qui est la terre. Le jumeau de la fusée voit alors celui de la terre vieillir moins vite que lui et quand il revient sur terre il pense que son jumeau resté au sol est plus jeune : Voilà le paradoxe, chacun pense que l'autre est plus jeune.

La 1^{ère} conclusion est correcte, la seconde est fausse.

En effet, le voyage n'est pas symétrique pour les 2 jumeaux: celui de la fusée subit une accélération et donc sort du cadre de la relativité restreinte pour entrer dans celui de la relat. générale.

C'est la relativité générale qui lève le paradoxe : il est permis aux 2 jumeaux de conclure que c'est celui de la fusée qui est le plus jeune.

Ce paradoxe des "jumeaux" a été testé de manière très fine, en 1971 :

4 horloges atomiques ont été embarquées à bord d'un avion effectuant un voyage autour de la terre, une fois vers l'est, une autre fois vers l'ouest (afin de tenir compte de la rotation de la terre). Ces horloges ont été comparées à 4 autres horloges identiques restées au sol. Les décalages mesurés, de l'ordre de $270 \times 10^{-9} \text{ s}$ étaient bien conformes aux calculs fondés sur la théorie de la relativité.

NB : La précision des horloges atomiques actuelles peut atteindre 10^{-14} s !
ce qui correspond à une erreur de 1s en 3 millions d'années.

Exercice

Un fil rectiligne conducteur de section S est parcouru par un courant i . Ce courant est lié au déplacement des électrons de conduction à l'intérieur du métal, et on supposera la vitesse v des électrons uniforme, parallèle au fil et connue. Par ailleurs, on considère une charge-test q se déplaçant à l'extérieur du fil parallèlement à celui-ci avec la même vitesse v que les électrons circulant dans le fil.

- a) dans un référentiel lié au laboratoire, calculer la force magnétique qui agit sur la charge-test q
- b) dans un référentiel se déplaçant avec les électrons à vitesse v , calculer cette force. Discuter le résultat.

Itatif :

- c) en prenant un modèle relativiste, calculer la force électrique qui agit sur q dans le référentiel lié au laboratoire.
- d) effectuer le même calcul dans le référentiel (b). Discuter le résultat.

surface du cercle de rayon r donne :

$$\frac{1}{\mu_0} \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{1}{\mu_0} B \cdot 2\pi r =$$

$$= \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{r} = i \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

Or le courant i est donné par :

$$i = \rho_- \cdot v \cdot (\pi R^2)$$

où ρ_- est la densité volumique de charges "libres" (électrons de conduction).

La force qui agit donc sur la charge-test q , en remarquant que $\vec{v} \perp \vec{B}$, vaut donc :

$$|\vec{F}| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\rho_- q v^2 (\pi R^2)}{r}$$

b) Dans le référentiel S' en translation avec la charge-test q , les e^- libres sont au repos et les ions $\oplus$ se déplacent avec la vitesse $-v$.

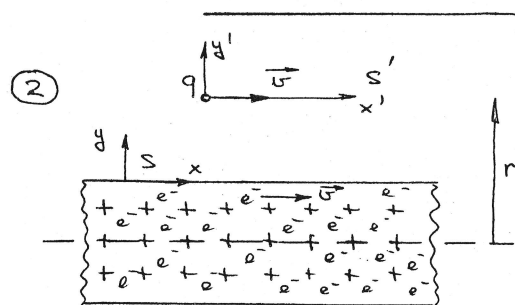
$$\text{Donc : } B'(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i'}{r} \quad \text{avec } i' = -\rho_+ v (\pi R^2)$$

Mais si le conducteur est neutre :

$$\rho_- = -\rho_+ \quad \Rightarrow \quad B(r) = B'(r)$$

Cependant, la vitesse relative de la charge-test par rapport à S' étant nulle, la force F' dans ce référentiel l'est aussi ! L'effet serait ainsi différent, en changeant simplement de référentiels

CORRIGÉ



a) Dans le référentiel S lié au fil conducteur, donc au laboratoire, les charges $\oplus$ sont immobiles et les e^- se déplacent avec une vitesse v . Le champ magnétique $\vec{B}$ créé au niveau de la charge-test q est donné par :

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j}$$

Et cette relation locale intégrée sur la

d'inertie ! la seule force qui puisse agir sur q dans le référentiel S' est une force électrique puisque la charge-test est au repos.

- c) Bien que la vitesse v des électrons dans le fil soit faible ($\approx 0,1 \text{ mm/sec}$), nous allons voir que nous avons affaire à un problème de relativité ! En effet, si l'on considère un cylindre dont la longueur au repos est L_0 , sa longueur L lorsqu'il est en translation uniforme v est donnée par :

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{contraction})$$

Une densité de charges ρ_0 au repos sera telle qu'en mouvement de translation on ait :

$$\rho_0 L_0 \cdot A = \rho L \cdot A \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On doit donc écrire pour les densités de charges ρ_- et ρ_+ :

$$\text{dans } S : \quad \rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

car ρ'_- correspond à des charges au repos dans S'

$$\text{dans } S' : \quad \rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donc dans le référentiel S , nous voyons une densité de charges nette :

$$\rho = \rho_- + \rho_+ = 0 \quad \text{par neutralité du fil.}$$

Donc la seule force est la force magnétique que nous avons calculée en (a).

- d) dans le référentiel S' , la densité nette de charges est donnée par :

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et comme $\rho_- = -\rho_+$ par neutralité :

$$\rho' = \rho_- \left\{ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} = \rho_- \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On peut calculer le champ électrique créé par un fil infini rectiligne en utilisant le th. de Gauss :

$$E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{1}{\epsilon_0} \rho' \cdot \pi R^2 \ell$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r} (\pi R^2) \rho_- \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{D'où : } |\vec{F}'_e| = q|E_r| = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\rho_- q v^2}{r \cdot c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Et de par la relation :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\text{on constate que : } F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pour les petites vitesses v considérées ici, on peut dire que $F' \approx F$. En fait, de par la loi de transformation des forces en relativité, il y a vraiment identité entre les deux manières de voir.