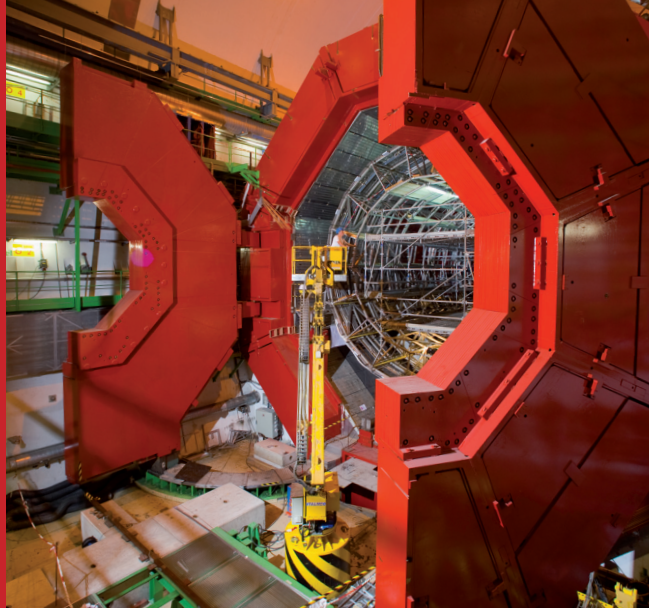


**MASTER
SCIENCES DE LA MATIÈRE
ÉCOLES D'INGÉNIEURS**



Les principes variationnels en physique

par Jean-Louis Basdevant

- Cours complet
- Démonstrations
- Exercices d'application corrigés

Vuibert

Table des matières

1	Le principe physique « d'économie naturelle »	1
1.1	L'esthétique dans la physique	3
1.2	La philosophie des lumières et le principe du meilleur	7
1.3	Principes de Fermat et de Maupertuis	8
1.4	Principes variationnels	10
1.5	La période moderne, de Lagrange à Einstein et à Feynman	13
2	Principes variationnels	21
2.1	Principe du temps minimum de Fermat	22
2.2	Le calcul variationnel d'Euler et Lagrange	26
2.2.1	Calcul variationnel	26
2.2.2	Mirages et rayons courbes	27
2.3	Principe de Maupertuis	30
2.4	Autres exemples du principe d'optimalité	32
2.4.1	Forme d'une corde pesante	32
2.4.2	Lois de Kirchhoff	33
2.4.3	Potentiel électrostatique	33
2.4.4	Bulles de savon	35
2.5	Équilibre thermodynamique : principe du désordre maximum	36
2.5.1	Principe d'équiprobabilité des configurations	36
2.5.2	Distribution la plus probable ; équilibre	37
2.5.3	Multiplicateurs de Lagrange	38
2.5.4	Facteur de Boltzmann	39
2.5.5	Égalisation des températures	40
2.5.6	Le gaz parfait	41
2.5.7	L'entropie de Boltzmann	42
2.5.8	Chaleur et travail	43
2.6	Exercices	44

3	La mécanique analytique de Lagrange	49
3.1	Formalisme lagrangien et principe de moindre action	51
3.1.1	Principe de moindre action	51
3.1.2	Équations de Lagrange-Euler	53
3.1.3	Fonctionnement du principe d'optimisation	55
3.1.4	Les détours de l'Histoire	56
3.2	Invariances et lois de conservation	57
3.2.1	Moments conjugués, impulsions généralisées	57
3.2.2	Variables cycliques	58
3.2.3	Énergie et translation dans le temps	58
3.2.4	Théorème de Noether : symétries et lois de conservation	59
3.2.5	Impulsion et translations dans l'espace	60
3.2.6	Moment cinétique et rotations	61
3.2.7	Symétries dynamiques	61
3.3	Forces dépendant de la vitesse	62
3.3.1	Systèmes dissipatifs	62
3.3.2	Force de Lorentz	63
3.3.3	Invariance de jauge	65
3.3.4	Impulsion et quantité de mouvement	66
3.4	Lagrangien d'une particule relativiste	66
3.4.1	Particule libre	66
3.4.2	Impulsion et énergie	67
3.4.3	Interaction avec un champ électromagnétique	68
3.5	Exercices	70
4	Formalisme canonique d'Hamilton	73
4.1	Formalisme canonique d'Hamilton	74
4.1.1	Équations canoniques	75
4.2	Crochets de Poisson	76
4.2.1	Crochets de Poisson	76
4.2.2	Évolution temporelle, constantes du mouvement	77
4.2.3	Théorème de Poisson	77
4.2.4	Mécanique analytique et mécanique quantique	78
4.3	Transformations canoniques	79
4.3.1	Exemple : oscillateur harmonique	81
4.3.2	Variable cyclique, variables angle-action	82
4.4	Espace des phases, théorème de Liouville	82
4.4.1	Élément de volume dans l'espace des phases	83
4.4.2	Flot hamiltonien	84
4.5	Particule chargée dans un champ électromagnétique	85
4.5.1	Hamiltonien	85
4.5.2	Invariance de jauge	85
4.6	Systèmes dynamiques	86

4.6.1	Poincaré et le chaos dans le système solaire	86
4.6.2	Théorème de récurrence de Poincaré	88
4.6.3	L'effet aile de papillon ; l'attracteur de Lorenz	89
4.7	Exercices	91
5	Action, Optique, Équation d'Hamilton-Jacobi	97
5.1	Optique géométrique, fonction caractéristique d'Hamilton	99
5.2	L'action et l'équation d'Hamilton-Jacobi	102
5.2.1	L'action comme fonction des coordonnées et du temps	103
5.2.2	Équation d'Hamilton-Jacobi	105
5.2.3	Systèmes conservatifs, principe de Maupertuis	105
5.2.4	Optique géométrique et mécanique classique	108
5.3	Approximation semi-classique en mécanique quantique	108
5.4	Formalisme d'Hamilton-Jacobi	110
6	Théorie lagrangienne des champs	113
6.1	Corde vibrante	114
6.2	Équations des champs	115
6.2.1	Équations de Lagrange-Euler généralisées	115
6.2.2	Formalisme hamiltonien	116
6.3	Champ scalaire	117
6.4	Champ électromagnétique	118
6.5	Équations du premier ordre en temps	120
6.5.1	Équation de la diffusion	120
6.5.2	Équation de Schrödinger	120
6.6	Exercice	122
7	Mouvement dans un espace courbe	123
7.1	Espaces courbes	125
7.1.1	Généralités	125
7.1.2	Tenseur métrique	127
7.1.3	Exemples	127
7.2	Mouvement libre dans un espace courbe	129
7.2.1	Lagrangien	129
7.2.2	Équations du mouvement	130
7.2.3	Exemples simples	130
7.2.4	Moments conjugués et hamiltonien	133
7.3	Les géodésiques	133
7.3.1	Définition	133
7.3.2	Équation des géodésiques	134
7.3.3	Exemples	135
7.3.4	Principe de Maupertuis et géodésiques	137
7.4	Gravitation et courbure de l'espace-temps	138

7.4.1	Gravitation newtonienne et relativité	139
7.4.2	Métrique de Schwarzschild	140
7.4.3	Gravitation et écoulement du temps	141
7.4.4	Précession du périhélie de Mercure	143
7.4.5	Déflexion gravitationnelle des rayons lumineux	146
7.5	Optique et mirages gravitationnels	150
7.5.1	Effet de lentille gravitationnelle	150
7.5.2	Mirages gravitationnels	150
7.6	Exercices	156
8	La phase et le principe de Feynman	157
8.1	Le principe de Feynman	158
8.1.1	Résumé de mécanique analytique.	158
8.1.2	Amplitudes quantiques	159
8.1.3	Principe de superposition et principe de Feynman	160
8.1.4	L'intégrale de chemins	161
8.1.5	Amplitude d'événements successifs	163
8.2	Particule libre	164
8.2.1	Propagateur d'une particule libre	165
8.2.2	Équation d'évolution du propagateur libre	167
8.2.3	Normalisation, interprétation du propagateur	168
8.2.4	Équations de Fourier et de Schrödinger	168
8.2.5	Fréquence et longueur d'onde	169
8.2.6	Interférences et diffraction	170
8.3	Fonction d'onde, équation de Schrödinger	171
8.3.1	Particule libre	172
8.3.2	Particule dans un potentiel	172
8.4	Quelques observations en guise de conclusion	174
8.4.1	Limite classique	175
8.4.2	Énergie et impulsion	175
8.4.3	Optique et mécanique analytique	176
8.4.4	L'essence de la phase	177
8.5	Exercice	178
9	Solution des exercices	181
	Bibliographie	193
	Index	195

CHAPITRE 1

Le principe physique « d'économie naturelle »

*Puisque les mystères nous dépassent,
feignons d'en être les organisateurs.*

Jean Cocteau

LA PENSÉE PHILOSOPHIQUE a toujours accompagné le progrès scientifique, en dépassant le monde du dogme vers celui de l'esprit. Thalès, fondateur de l'École de Milet, au VI^e siècle avant notre ère, fut le premier « penseur » de l'Histoire. Il est reconnu comme le premier vrai philosophe, scientifique et mathématicien du monde occidental. La liste de ses exploits scientifiques, technologiques, stratégiques est immense. Il a surtout été le premier à comprendre, dans un monde où tous les phénomènes baignaient dans une mythologie immodérément complexe, que, mis à part l'origine même du monde, l'on devait expliquer logiquement les phénomènes à partir d'un ensemble de causes naturelles simples. Il s'est posé les questions : qu'est-ce que penser ? Quels liens y a-t-il entre ce que je pense et ce qui est ? Y a-t-il des choses qui échappent à ma pensée ? De quoi est faite la nature ? Bien entendu, tout cela ne peut pas être sans qu'un principe d'harmonie préside à l'organisation rationnelle de l'univers.

Il en a été de même jusqu'à la période moderne. (La période contemporaine est très effervescente et constitue un sujet en soi.) Les considérations véritablement métaphysiques ont constamment frôlé, voire épousé, les chemins de la physique.

À l'issue d'un travail considérable, tant sur le plan observationnel¹ que sur celui du calcul,² Kepler parvient à ses célèbres lois sur le mouvement des planètes du système solaire. Découvrir, dans une vision copernicienne du système solaire, que les orbites sont des ellipses, ces courbes pures et légendaires de la géométrie d'Apollonius,

¹ La lunette de Galilée ne fut inventée qu'en 1609, plus de dix ans après les travaux de Kepler.

² Kepler dédia son mémoire *Mysterium cosmographicum* à Napier, inventeur des logarithmes, sans qui, disait-il, il n'aurait jamais pu mener à bien son entreprise.

Euclide et Archimède, est d'une beauté et d'une simplicité auxquelles Kepler ne peut résister. Il ne peut qu'être amené à concevoir l'univers comme inspiré par une esthétique mathématique qui montre la pureté et l'unité. Il exprime son émotion dans sa phrase : « la nature aime la simplicité ». ³ Ce sera un triomphe et un émerveillement pour Newton que de déduire mathématiquement les lois de Kepler dans le cadre de ses *Principia*.

En étudiant la trajectoire de la comète de 1682, et signalée dès 240 avant notre ère, Halley montrait que son orbite est elliptique et, appliquant pour la première fois les lois de Newton sur le mouvement, prévoyait avec succès sa réapparition pour 1758. Le mouvement céleste, totalement imbriqué dans la notion de temps, le plus mystérieux des concepts physiques ⁴ hantait les hommes depuis qu'ils observaient le ciel. Avec les lois de Newton, l'homme était devenu capable de prédire l'état du ciel avec parfaite précision ! Newton, émerveillé par cette précision, y avait trouvé une preuve de l'existence de Dieu. Puisque le système était si parfaitement réglé, puisque l'on pouvait prédire l'état futur du ciel, puisque l'on pouvait, par les équations, remonter le temps et retrouver l'état des planètes à n'importe quelle date antérieure, il fallait admettre que le système solaire, comme tout le cosmos, avait été conçu et installé par une puissance supérieure. « L'ordre qui règne dans les choses matérielles indique assez qu'elles ont été créées par une volonté pleine d'intelligence » écrivait-il dans son *Traité d'optique*.

À l'apogée de la découverte d'une théorie physique, il n'est pas inhabituel de voir invoquer une « puissance supérieure ». Ce peut être, comme dans le cas de Newton, un véritable argument théologique. C'est souvent une interrogation par rapport à cet « organisme » structuré que constitue l'ensemble des phénomènes naturels. Kepler et les orbites planétaires en donnent un exemple. On ne peut évidemment pas manquer de rappeler les phrases légendaires d'Einstein, comme « le Seigneur n'est pas méchant, il est subtil » ou « Dieu ne joue pas aux dés ». Toutefois, au-delà de ces interrogations ou affirmations, peut-être marquées par la culture judéo-chrétienne, on retrouve en permanence, dans la progression de la physique, une quête métaphysique, une recherche des causes du monde et des principes mêmes de la connaissance. Cette quête se transforme parfois en celle d'une véritable « métathéorie ».

³ *Natura simplicitatem amat*

⁴ « Qu'est-ce donc que le temps ? Si personne ne me le demande, je le sais. Si quelqu'un pose la question et que je veuille l'expliquer, je ne sais plus. » Saint Augustin, *Les Confessions* Livre XI, XIV, 17.

1.1 L'esthétique dans la physique

Dans cet ordre d'idées, il est tentant de rapprocher ces conceptions de la science et celles de l'art. L'art est également indissociable de la métaphysique et de la philosophie. Dans ses *Leçons sur l'esthétique*, en réponse à la question : « Quel besoin l'homme a-t-il de produire des œuvres d'art ? », Hegel dit que : « Le besoin général d'art est [...] le besoin rationnel qui pousse l'homme à prendre conscience du monde intérieur et extérieur et à en faire un objet dans lequel il se reconnaisse lui-même. »

Ce même besoin explique que l'esthétique imprègne aussi profondément la physique. De fait, la beauté d'une théorie a souvent été considérée comme déterminante dans son acceptation. La relativité générale d'Einstein en donne un exemple célèbre. Énoncée en 1916, elle n'a commencé de recevoir ses premières vérifications expérimentales authentiques que 70 ans plus tard.⁵ Pourtant, on peut affirmer que personne ne pensait sérieusement que cette théorie pourrait être remise en cause.⁶ En effet, comme le dit Landau (réf. [2], § 82), « [Elle] est vraisemblablement la plus belle des théories physiques existantes. Il est remarquable qu'Einstein l'ait construite par voie purement déductive et que c'est seulement par la suite qu'elle ait été confirmée par des observations astronomiques. »

Les éléments de l'esthétique sont de nature diverse. Il y a, bien entendu, la beauté d'une idée en soi, difficile voire impossible à définir de façon générale. Mais deux facteurs sont plus facilement identifiables : la simplicité d'une théorie et sa nature unificatrice. Ces deux facteurs n'ont de sens que parce que la physique s'exprime sous forme mathématique.

Nous parlerons ci-dessous de l'archétype qu'est la gamme pythagoricienne, les exemples abondent, bien entendu.

L'unification de l'électricité et du magnétisme par Ampère, puis celle de l'électromagnétisme et de la lumière par Maxwell est une prodigieuse aventure du XIX^e siècle qui se poursuivra longtemps. La structure mathématique des équations de Maxwell dévoilera la relativité. L'unification des interactions électro-faibles par Glashow, Weinberg et Salam dans les années 1960 sera saluée comme l'étape suivante de cette aventure exaltante. Elle est à l'origine d'un fabuleux effort qui perdure pour unifier l'ensemble des interactions fondamentales, y compris la gravitation. On y retrouve à chaque étape le souci de l'esthétique comme celui de la simplicité et de l'unité.

La simplicité ne signifie pas que les choses deviennent abordables au tout-venant,

⁵ On a coutume de distinguer les vérifications du principe d'équivalence (voir la référence [1], chapitre 8), comme la déviation des rayons lumineux par le champ gravitationnel, la variation de la marche d'une horloge en fonction de la pesanteur, ou la précession du périhélie des astres, des véritables prévisions de la relativité générale, comme le rayonnement d'ondes gravitationnelles.

⁶ Ce qui n'est pas une raison pour renoncer aux vérifications expérimentales.

bien au contraire. Cette simplicité vaut dans le langage mathématique. Galilée est le premier à l'énoncer : « La philosophie est écrite dans ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire : l'Univers), mais on ne peut le comprendre si l'on n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot. »

Rajoutons, parmi tant d'autres, les mots de Léonard de Vinci dans son *Traité de la peinture* : « Non mi legga chi non è matematico, nelli mia principi ». ⁷ La simplicité réside dans la possibilité – mystérieuse – de représenter les phénomènes naturels par des structures mathématiques de plus en plus générales. Si l'on peut dire que la structure mathématique la plus fondamentale de la mécanique quantique est la première des quatre opérations, l'addition, ⁸ c'est la conséquence de l'immense effort de synthèse mené par les physiciens et mathématiciens des années 1920-1930. Le principe de superposition, pont aux ânes de celui qui aborde la mécanique quantique, est ce qui heurte le plus l'intuition physique première. Mais si son expression se réduit à peu de choses, cette simplicité ne peut être véritablement savourée qu'au bout d'un long et incontournable parcours mathématique.

Les nombres et l'esthétique

Longtemps, le nombre a représenté le substrat métaphysique tant recherché.

Si l'on convient de situer la naissance de la physique moderne au XVII^e siècle avec Galilée, le point de départ de la physique expérimentale et théorique est bien plus ancien. Il se situe il y a 2 500 ans. En effet, le théorème de Pythagore occulte ce qui, au sens de Galilée, constitue la première découverte moderne en physique : la théorie des sons et la gamme musicale. Moderne, car la découverte possède ces deux vertus d'avoir un fondement expérimental et d'être exprimée sous forme mathématique.

La musique est le premier art abstrait. Elle fascine parce qu'elle atteint directement l'inconscient. Elle échappe à toute tentative de verbalisation. Hormis les discussions techniques ponctuelles que peuvent entretenir des initiés, on ne raconte pas la musique. L'écriture musicale est un sujet d'émerveillement inépuisable, on en voit un exemple sur la figure I.1. On ne peut dater la naissance de cet art, mais il est certain que, très tôt, les humains, dans leurs chants, ont compris l'harmonie. Le plus simple exemple, l'octave, est la découverte prodigieuse qu'un même son puisse se reproduire à l'aigu comme au grave.

La tradition veut que Pythagore, en passant quotidiennement devant l'atelier d'un

⁷ Ne lise pas mes principes qui n'est pas mathématicien.

⁸ Voir par exemple J-L. Basdevant, *La Mécanique quantique, dogme ou humanisme ?* Découverte, Revue du Palais de la Découverte, numéro 288, mai 2001.

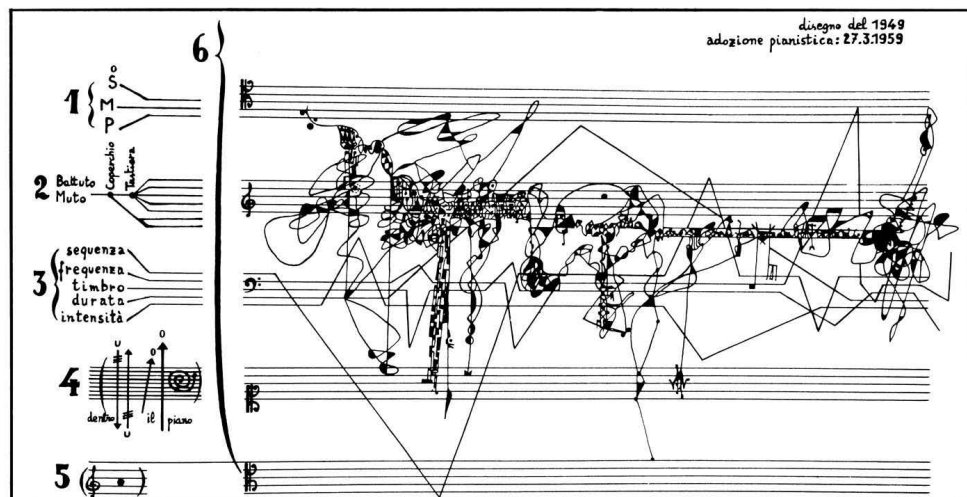


Figure 1.1. Sylvano Bussotti, *Pièces de piano pour David Tudor # 4* extrait de *Pièces de Chair II*, © Casa Ricordi-BMG Ricordi Milan ; tous droits réservés.

forgeron, dans son île natale de Samos,⁹ ait compris que la hauteur des sons est directement reliée aux dimensions des objets qui les produisent. Il avait remarqué que des barres de longueur différente produisaient des sons différents lorsqu'elles étaient percutees par le marteau du forgeron. Comme le dit Arthur Koestler (réf.[3], chapitres V et VII), « Depuis que l'âge de bronze avait fait place à l'âge de fer, les martèlements assourdissants avaient été considérés par les mortels ordinaires comme une simple nuisance. Pythagore avait ainsi transformé du *bruit* en de *l'information* ». De retour chez lui, il procède à une expérimentation sur des objets musicaux, notamment sur les cordes vibrantes d'une lyre. Il comprend que diviser une corde par un nombre entier appartenant à la *tetraktys* de la décade, la progression des nombres 1,2,3,4 dont la somme est le nombre « parfait » 10, produit ce que l'on nomme depuis longtemps *l'harmonie*, à savoir l'octave, la quinte et la quarte.

Laissons la parole à Diderot dans l'article « Pythagorisme » de l'*Encyclopédie* :¹⁰

La musique est un concert de plusieurs discordants. Il ne faut pas borner son idée aux sons seulement. L'objet de l'harmonie est plus général.

⁹ Peu importe, à vrai dire, que l'anecdote soit vraie, que ce soit Pythagore lui-même qui ait fait la découverte. Dans tous les cas, on ne peut nier ni la profondeur de l'idée, ni l'observation expérimentale qu'elle provoque, ni la théorie en nombres entiers qu'elle engendre et qui nous est parvenue.

¹⁰ Édition critique de J. Assézat, Garnier Frères, Paris, 1876.

L'harmonie a ses règles invariables. [...]
L'octave, la quinte et la quarte sont les bases de l'arithmétique harmonique.
La manière dont Pythagore découvrit les rapports en nombres de ces intervalles de sons marque que ce fut un homme de génie.

Après une étude que l'on peut imaginer sur les harmoniques d'un son, et sur la façon de les ramener dans l'intervalle d'une même octave en divisant par des puissances de 2, Pythagore parvient à ces gammes, notamment celle qui porte son nom et qui est représentée dans la table ci-dessous. Les nombres désignent ici des rapports de fréquence (les modes grecs étaient énoncés sous la forme descendante en fonction de la longueur).

note	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
rapport de fréquence	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Rapports de fréquences dans la gamme pythagoricienne.

Dans cette gamme, les intervalles séparant deux notes voisines ne prennent que deux valeurs : le ton (rapport 9/8) et le demi-ton (rapport 256/243).
Pythagore voit une importance particulière à ce que les numérateurs et dénominateurs de ces fractions soient des puissances des éléments de la tetraktys (en l'occurrence de 2 et 3). Pour lui, la gamme ci-dessus a une esthétique infiniment supérieure à celle des autres.

Nous pouvons, dans ce sens, compléter le texte de Diderot par sa dernière phrase :

Le mouvement des orbites célestes, qui emporte les sept planètes, forme un concert parfait.

Un mérite de Pythagore est, comme le soulignait Aristoxène, d'avoir « élevé l'arithmétique au-dessus des besoins des marchands ». Il a transformé un ensemble de recettes empiriques utilitaires, notamment dans le commerce, en une science démonstrative. Il est probable que c'est à Pythagore lui-même que l'on doit l'affirmation, rapportée par Aristote, selon laquelle toutes choses sont des nombres. Mais, partant de son analyse de l'harmonie musicale, qui se laisse ramener à des nombres entiers, il ne peut résister à l'idée que *les nombres sont le principe, la source et la racine de toutes choses*. Nous voilà donc dans la métaphysique. Sur ce principe, les pythagoriciens élaborent une arithmologie mystique, en assignant aux nombres des propriétés qualitatives. Ils en arrivent à concevoir et décrire ainsi le cosmos et son origine grâce à *l'harmonie des sphères*. Le principe d'harmonie envahit ainsi toute la philosophie

des pythagoriciens : ils conçoivent l'univers tout entier comme régi par les nombres entiers et par l'harmonie qui en résulte.

Pythagore porta les nombres entiers comme un fondement du monde. On dit qu'il se suicida le jour où il comprit qu'il venait de démontrer que $\sqrt{2}$ était irrationnel, qu'il ne pouvait *pas* s'écrire comme le rapport de deux entiers. La diagonale d'un carré ne se rapporte pas à son côté par une fraction !

La numérologie a joué un rôle considérable dans le développement de la science au XIX^e siècle. La loi des proportions définies ramenait les réactions chimiques à des jeux de nombres entiers. La classification et l'évolution des espèces en zoologie et en botanique reposait sur des nombres (pétales, cotylédons, dents, doigts etc.). La phénoménologie des spectres atomiques faisait intervenir des fractions entières. Cette dernière aventure débouchera sur une des percées les plus étonnantes, celle de la formule en nombres entiers de Balmer et son rôle dans la naissance de la mécanique quantique.

C'est tout à fait par hasard qu'en 1885, Balmer, professeur de lycée à Bâle et passionné de numérologie, fut mis en présence du spectre de l'hydrogène. Il constata que les longueurs d'onde des raies d'émission de l'hydrogène dans le visible pouvaient se représenter, au millième près, par une formule faisant intervenir des nombres entiers : $1/\lambda \propto (n^2 - 4)/n^2$, $n \geq 3$.

Bien qu'il ne fût pas physicien, frappé par la simplicité et l'esthétique de cette formule, il écrivit dans son article de 1885 : « Il m'apparaît que l'hydrogène, [...], plus que toute autre substance, est destiné à nous ouvrir de nouvelles voies dans la connaissance de la matière, de sa structure et de ses propriétés », paroles prophétiques.

En effet, lorsqu'en 1912, Niels Bohr, âgé de 27 ans, travaillait chez Rutherford sur un modèle de l'atome, il ignorait totalement la formule de Balmer, et celles, analogues, de Rydberg pour les alcalins. Quand, par hasard, il apprit l'existence de la formule de Balmer, il ne fallut que quelques semaines à Bohr pour construire son célèbre modèle de l'atome d'hydrogène, un des tournants de la physique quantique.

1.2 La philosophie des lumières et le principe du meilleur

La notion d'*équilibre* était chère aux penseurs du XVIII^e siècle. Citons, ne serait-ce que par sa consonnance d'actualité, une phrase de Montesquieu dans *De l'esprit des lois* :

Dans toute magistrature, il faut compenser la grandeur de la puissance par la brièveté de sa durée.

Avec la philosophie de Leibniz, (1646-1716) on voit se dessiner la reconnaissance de l'existence de conditions optimales dans la nature. Retournons vers Diderot et

l'article « Leibnizianisme » dans l'*Encyclopédie*.

Il avait encore sur la physique générale une idée particulière : c'est que Dieu a fait avec la plus grande économie possible ce qu'il y avait de plus parfait et de meilleur ; il est le fondateur de l'optimisme, ou de ce système qui semble faire de Dieu un automate dans ses décrets et dans ses actions, et ramener sous un autre nom et sous une forme spirituelle le fatum des Anciens, ou cette nécessité aux choses d'être ce qu'elles sont. [...] Cependant, comme il y a une infinité de combinaisons et de mondes possibles dans les idées de Dieu, et que de ces mondes il n'en peut exister qu'un, il faut qu'il y ait une certaine raison suffisante de son choix : or cette raison ne peut être que dans le différent degré de perfection ; d'où il s'ensuit que le monde qui est, est le plus parfait.¹¹ Dieu l'a choisi dans sa sagesse, connu dans sa bonté, produit dans la plénitude de sa puissance.

Dans ses *Nouveaux essais sur l'entendement humain* Leibniz écrit : « Mon système prend le meilleur de tous côtés ». Chez lui, Dieu est conçu comme un mathématicien. Nous revoilà dans la métaphysique.

Il faut, bien entendu, tempérer cette impression d'enthousiasme. Il n'y avait unanimité pas plus sur Leibniz que sur tout autre penseur. Voltaire dans *Candide*, se complaît à ridiculiser les idées de Leibniz, « Tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes » :

Il est démontré, disait-il, que les choses ne peuvent être autrement : car tout étant fait pour une fin, tout est nécessaire pour la meilleure fin. Remarquez bien que les nez ont été faits pour porter des lunettes. (Chap.1)

1.3 Principes de Fermat et de Maupertuis

Le coup de tonnerre scientifique, c'est-à-dire la formalisation mathématique de telles idées, nous est d'abord venue de Pierre de Fermat (1601-1665), comme nous le verrons au chapitre II. L'idée fondatrice est le principe de l'optique géométrique qui porte son nom et qui est un principe de *temps* minimum.

De fait, tout a démarré vers 1637 dans une vive critique adressée à Descartes par Fermat à propos de la notion de démonstration. L'irritation de Fermat faisait suite à la publication de la *Dioptrique* dans le *Discours de la Méthode*. Fermat, magistrat toulousain, était mathématicien, mais pas physicien. Il s'intéressait cependant à la

¹¹ Il est piquant de voir renaître, dans le foisonnement actuel de la cosmologie observationnelle et théorique, la possible nécessité d'invoquer le « principe anthropique » pour sélectionner notre Univers parmi une infinité de « multivers » où la vie ne pourrait pas toujours exister ; voir James A. Rich *Cosmologie*, Vuibert, 2010, pp. 42-48.

structure des lois physiques¹² et notamment aux lois de l'optique. Le manque de rigueur de la « pseudo-démonstration » de Descartes, irritait Fermat. Celui-ci était convaincu que l'on pouvait faire les choses correctement : « Il me semble qu'un peu de géométrie pourra nous tirer d'affaire ». Quand il parvint à démontrer géométriquement la loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, Fermat fut littéralement fasciné :

Le fruit de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fût jamais. Car [...] j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions que M. Descartes a établie.

À la fin de 1661, Fermat énonce son principe de moindre temps, qui déclenchera tout :

Il n'y a rien de si probable ni de si apparent que cette supposition, que la nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'accourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération.

En 1744, Maupertuis énonça pour la première fois ce qu'il nomma le « *principe de la moindre quantité d'action* » pour la mécanique. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) avait introduit en 1730 les idées de Newton en France. L'énoncé et la justification proposés initialement par Maupertuis sont confus, mais il s'agit d'une date historique dans l'évolution des idées en physique et, à l'époque, dans la philosophie.

Poursuivant les travaux de Fermat, Maupertuis comprit que, dans des conditions bien déterminées, les équations de Newton sont équivalentes au fait qu'une quantité, qu'il nomma *l'action*, soit minimale. Selon ses propres termes :

L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'être suprême : Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible.

(On remarquera la présence de l'être suprême.)

Pour une particule de masse m , de vitesse $\mathbf{v}$, l'action de Maupertuis est donc le produit de trois facteurs, la masse, la vitesse, et la distance parcourue, ou encore l'intégrale de la quantité de mouvement le long de la trajectoire : $A = \int m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$. La formulation et la démonstration du principe de Maupertuis furent données peu après par Euler, son ami.

Ces principes eurent un grand retentissement au XVIII^e siècle. Que les lois de la nature puissent se déduire de principes d'optimisation, c'est-à-dire d'équilibre entre

¹² Il avait notamment entretenu une correspondance avec Étienne Pascal, père de Blaise, et Roberval sur l'équilibre mécanique.

causes en conflit, ne pouvait que frapper les esprits au siècle des lumières. Le « principe d'économie naturelle » fascinait. Il réalisait le meilleur accord entre différentes lois de la nature qui apparaissaient en opposition, voire en conflit. On le rattachait volontiers au principe du « meilleur » de Leibniz.

1.4 Principes variationnels

Les principes variationnels sont la forme mathématique du superlatif. Cette formulation se fait en demandant que la valeur d'une quantité typique du système, soit optimale, pour la performance effectivement réalisée par le système, par rapport à ce qu'elle vaudrait si l'on imaginait une performance différente. Ils sont d'un usage courant en mathématiques appliquées.

Dans une certaine mesure, les principes variationnels, par leur universalité dans le monde des choses, peuvent apparaître comme une « métathéorie » générale de la physique, voire, un jour, des autres sciences naturelles comme la biologie, la psychologie ou les phénomènes sociaux. Ils jouent un rôle en économie.

La forme première d'une théorie physique explique un phénomène par une loi locale. Telles sont les lois de la dynamique de Newton, les lois de Descartes-Snell, et les lois différentielles de l'électromagnétisme ou de la thermodynamique. Une fois la première pierre de la théorie mise à jour, et après les premières exploitations de la découverte, on en recherche les principes sous-jacents et leurs liens avec d'autres schémas.

Les principes variationnels permettent d'exprimer les lois physiques sous une forme *globale*. Cette forme permet, bien entendu, de retrouver le détail des lois locales, mais on découvre qu'elle est plus riche et puissante. Elle permet de dégager les principes fondamentaux des lois qu'elle manipule. Cela donne une vision plus féconde au plan des fondements comme à celui des applications.

On retrace cette façon de concevoir les processus et structures physiques chez les mathématiciens et philosophes grecs. Les Grecs caractérisaient un segment de droite comme la ligne de plus petite longueur joignant ses extrémités. Héron d'Alexandrie (au I^{er} siècle avant notre ère) avait *démontré* que l'égalité des angles d'incidence et de réflexion en optique géométrique se ramène au fait que la longueur du chemin parcouru par la lumière entre la source et l'œil de l'observateur est la plus courte possible. Dans la même ligne de pensée, les Aristotéliciens pensaient pouvoir « justifier » que les orbites célestes soient circulaires par le fait qu'à périmètre donné, de toutes les courbes planes fermées, le cercle est celle qui entoure l'aire la plus grande (problème dit de l'isopérimètre).¹³ Dire que la ligne droite est le chemin le plus court entre deux

¹³ La légende veut que Didon, lorsqu'elle fonda Carthage, ait reçu pour condition que sa ville tienne à l'intérieur d'une peau de taureau. Elle découpa des fines lanières dans la peau de façon à en faire un énorme cercle.

points ou que le cercle est la ligne la plus courte qui entoure une aire plane donnée sont des façons simples de définir ces êtres géométriques.

De la même façon, en physique, dire que le courant électrique se distribue dans un réseau de façon telle que la puissance perdue sous forme de chaleur est la plus petite possible est une description de la circulation du courant qui recouvre quantité de cas particuliers sans faire usage de mathématiques compliquées (bien entendu, les calculs réapparaissent dès que l'on applique le principe à un cas particulier). La proposition qu'un système physique agit (ou évolue) de façon telle qu'une certaine fonction qui lui est reliée soit minimum ou maximum, est souvent le point de départ de la recherche théorique et de l'expression ultime des relations entre les faits physiques.

Ainsi, les principes variationnels présentent les phénomènes naturels comme des problèmes d'optimisation sous contraintes, ou encore de compromis entre effets de causes en conflit. Les principes variationnels sont présents dans tous les domaines de la physique (on pourra lire à ce propos les chapitres I,26 et II,19 du cours de Feynman réf.[4] et le livre de Yourgenau et Mandelstam réf.[5]).

En mécanique, première des sciences physiques si l'on y inclut l'acoustique de Pythagore, on reconnaît que la grande percée physique et philosophique qui mène aux idées actuelles provient de la remise en cause des idées d'Aristote sur le mouvement.¹⁴ Pour expliquer le mouvement et son évolution, Aristote peuplait l'espace de moteurs. Jean Philoppon, philosophe et grammairien grec (490-566), fut le premier à réfuter les conceptions aristotéliennes du mouvement. Au travers d'une série passionnante d'observations et de leur analyse critique, relevons deux questions d'une étonnante modernité. Lorsque deux corps en mouvement entrent en collision, leur trajectoire est déviée; comment se fait-il que s'ils se frôlent sans se toucher, leur trajectoire ne soit pas affectée? Autrement dit, comment ces « moteurs », qui remplissent le milieu ambiant, peuvent-ils agir de façon discontinue et imprévisible? Par ailleurs, pourquoi est-il plus facile de lancer un objet léger plus haut qu'un objet lourd? Philoppon entrevoyait qu'un élan est donné à l'objet lancé par celui qui le lance.

Il fut suivi 800 ans plus tard par Jean de Buridan (1300-1358). Comme Philoppon, Buridan avait une vision du mouvement comme résultant d'un équilibre entre des causes en conflit. Ce cadre de pensée est la première conception moderne de la mécanique.¹⁵ Buridan, recteur de l'Université de Paris de 1328 à 1340 était un logicien commentateur d'Aristote. On lui doit le concept de base, celui « d'impetus » ou d'élan comme source du mouvement, en opposition avec les « moteurs » dont Aris-

¹⁴ On pourra se référer à l'article de Luca Bianchi *La flèche d'Aristote : la physique du mouvement*, page 44, Dossier *Pour la Science*, octobre 2002.

¹⁵ Buridan avait, dans la même ligne de pensée, donné un argument célèbre sur la question du libre arbitre. Un âne affamé est à égale distance de deux tas de foin, personne, même pas Dieu ne peut savoir celui qu'il choisira. Il fallait du courage, de l'autorité et de l'habileté pour dire cela à la Sorbonne à cette époque.

tote peuplait l'espace. Pour Buridan, la nature du mouvement provient de la mise en œuvre d'un ensemble d'impetus en conflit, les lois du mouvement résultent d'une optimisation de cet ensemble de conflits.

En balistique, au XVI^e siècle, les artilleurs calculaient le mouvement des boulets de canon en utilisant le concept d'impetus de Buridan, comme on peut le voir sur la figure I.2.

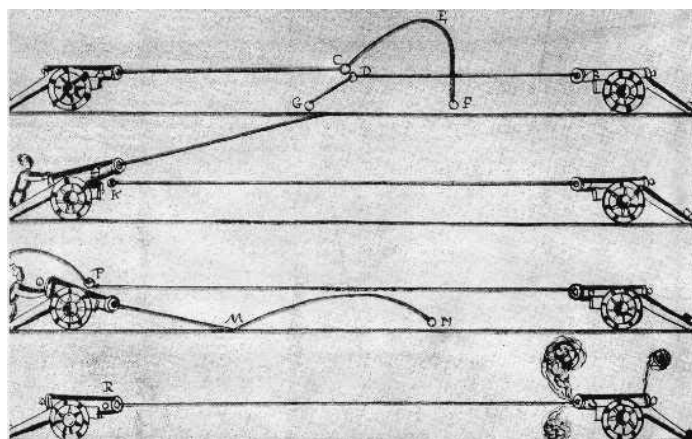


Fig. I.2. Extrait du manuel d'artillerie polonais *Ars Magne Artilleriae – pars prima : Dell'Aqua Praxis*, XVI^e siècle : exemples de tirs. (On peut y voir les prémisses des collisionneurs de particules de la fin du XX^e siècle.) Archives de Kazimierz Siemienowicz, Général de l'artillerie de la Couronne polonaise et lituanienne. © Richard J. Orli, 2001.

Dans le mouvement du projectile, trois phases étaient distinguées, qui sont représentées sur la figure I.3. Lors de la première, appelée mouvement violent, la trajectoire est rectiligne et le mouvement se développe sous l'action de l'impetus fourni par le canon. Dans la troisième, appelée mouvement naturel, la trajectoire est encore rectiligne, l'impetus qui cause le mouvement est celui de la pesanteur, impetus naturel vertical, et le boulet retombe.

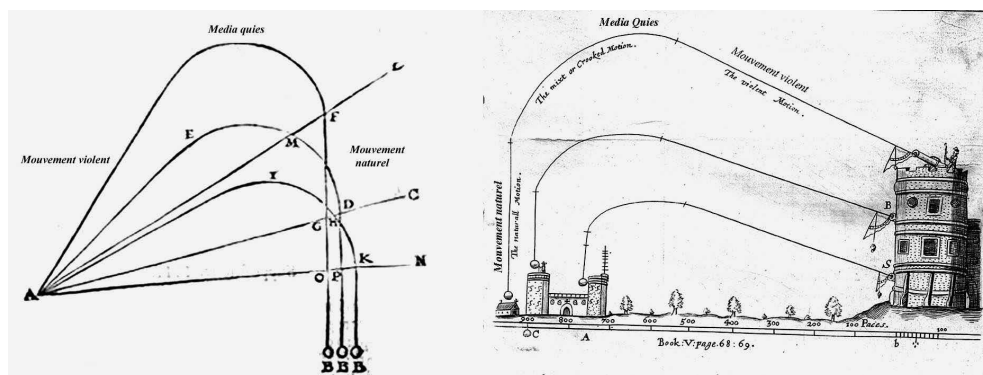


Fig. I.3. Phases successives du mouvement d'un boulet de canon dans la théorie de l'impetus. Gauche, théorie de Nicolò Tartaglia, *a Nova Scientia*, Venise, 1537. Droite, prescriptions de Samuel Sturmy pour l'artillerie anglaise, *The Mariners Magazine*, Londres, 1669.

La phase intermédiaire correspond à l'affaiblissement de l'impetus violent sous l'action de l'impetus naturel et aboutit à une sorte de repos, le *media quies*. Cette phase était conçue comme une transition, un compromis entre deux états de mouvement contradictoires où le projectile a un mouvement *grosso modo* horizontal et uniforme.

Notons que les trajectoires des projectiles étaient davantage à la verticale en fin de parcours que lors de l'impetus violent. Heureuse coïncidence que le frottement de l'air produise cet effet ! On notait à l'époque que les prévisions de cette descente étaient souvent erronées, car trop verticales s'il s'agissait de boulets de canon. Il semble que la première utilisation réussie de cette asymétrie, sur des projectiles plus sensibles à la résistance de l'air, soit due à Guillaume le Conquérant à la bataille d'Hastings en 1066. Les Saxons solidement installés sur la colline de Santlache, et protégés par le mur quasi-continu de leurs boucliers, semblaient invulnérables, alors que leurs archers, visant à tir tendu du haut de la colline, étaient dangereusement efficaces. Guillaume ordonna alors à une moitié de ses archers de tirer presque à la verticale, ce qui obligea les Saxons à lever leurs boucliers pour se protéger des flèches qui retombaient. Cela permit au second corps d'archers normands d'effectuer un tir tendu qui décima les troupes saxonnes. (*Sic transit gloria mundi*)

L'impetus était très en vogue au XVI^e siècle. Léonard de Vinci expliquait qualitativement le mouvement de la toupie par un conflit d'impetus axiaux.

1.5 La période moderne, de Lagrange à Einstein et à Feynman

L'enthousiasme métaphysique ne dura guère. Ce n'était pas faute de richesse ou d'esthétique intellectuelles. C'est parce que les principes variationnels n'ont cessé, depuis,

de *produire des résultats physiques* de plus en plus riches. C'est l'ambition de ce texte d'en décrire quelques-uns.

Leonhard Euler (1707-1783) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), dont les travaux furent poursuivis par William R. Hamilton (1805-1865), en posèrent les fondements mathématiques. Ils sont les pères de l'une des pierres angulaires de la physique théorique contemporaine.

Les conséquences de cette vision de la physique se retrouvent aux sources de la relativité générale d'Einstein aussi bien que des théories modernes des interactions fondamentales, les théories de jauge.

L'outil mathématique central en est le *calcul variationnel*. On le doit à Euler qui en avait compris le fonctionnement et à Lagrange qui, en 1766, y apporta une contribution décisive.¹⁶ Le calcul variationnel est un pan étonnant des mathématiques, tant par son côté fédérateur que par le nombre de questions auxquelles il a permis de répondre.

Euler publia en 1744 son traité *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens*, qui fondait le calcul des variations, dans la lignée des travaux de Jacques et Jean Bernoulli (l'ouvrage eut une influence considérable sur Lagrange). C'est dans ce travail qu'Euler justifia *a posteriori* le principe de moindre action de son ami Maupertuis.

Lagrange appartenait à une famille turinoise. Il était particulièrement doué et précoce. La réaction favorable d'Euler à ses travaux l'encouragea et, en 1756, il appliqua ses techniques au principe de moindre action sous une forme qui en fait le fondement de la mécanique et de la physique théorique modernes.

Une des contributions majeures de Lagrange est sa *Mécanique analytique* où il effectue la synthèse de l'ensemble des méthodes de statique et de dynamique qu'il avait développées antérieurement. L'ouvrage, achevé en 1782, ne parut qu'en 1788 à Paris. La mécanique de Lagrange est aussi importante dans l'histoire de la physique, de la mécanique et des mathématiques que la mécanique céleste de Newton. Elle sera le point de départ de toutes les recherches ultérieures, notamment les travaux d'Hamilton, qui la qualifia de « poème scientifique ».

Hamilton, né à Dublin, avait été, lui aussi, un enfant prodige. À l'âge de dix-neuf ans, il écrivit un travail remarquable sur l'optique. À vingt-trois ans, il devint professeur d'astronomie à Dublin et astronome royal à l'observatoire de Dunsink. Il resta toute sa vie fidèle à Dublin et à son observatoire.

¹⁶ Euler, qui était malvoyant depuis l'âge de 28 ans, devint complètement aveugle en cette même année 1766. Il reçut, en 1754, la visite du jeune Lagrange qui lui exposa ses travaux. Émerveillé par le talent de ce jeune homme, il dissimula un temps ses propres résultats, pour que le mérite en revienne au seul Lagrange. C'est un exemple, à peu près unique et maintenant disparu, de courtoisie humaine et de passion pour la science.

L'intérêt de Hamilton pour l'optique venait des instruments de son observatoire. Son mémoire, *On caustics* (Des caustiques), écrit en 1824, fait date. C'est peu après qu'il développa et amplifia la mécanique analytique de Lagrange, en lui donnant sa forme actuelle.

Fasciné par les principes variationnels, et en particulier par la similitude entre le principe de Maupertuis en mécanique et le principe de Fermat en optique géométrique, il fit en 1830 la remarque étonnante que les formalismes de l'optique et de la mécanique pouvaient être unifiés, et que la mécanique newtonienne correspondait à la même *limite*, ou approximation, que l'optique géométrique par rapport à l'optique ondulatoire!

Cette remarque fut ignorée par ses contemporains, ce que déplora en 1891 le célèbre mathématicien Felix Klein. Il est vrai qu'en 1830 aucune expérience ne mettait en évidence le rôle de la constante de Planck. Néanmoins, à bien des égards, Hamilton peut être considéré comme un précurseur de la mécanique quantique.

L'objectif central de ce livre est de fournir une description aussi instructive que possible de la mécanique analytique de Lagrange et Hamilton. Ce sont là des pans essentiels de la culture de tout physicien. Mais nous verrons, au passage, la multitude de leurs retombées dans d'autres secteurs. Nous montrerons notamment les liens intimes de la mécanique analytique avec l'optique et avec la mécanique quantique.

Dans le chapitre II, nous commencerons par rappeler le principe de Fermat. Les lois de Descartes prévoient quel sera le chemin suivi par un rayon lumineux initial donné. Fermat adopte un point de vue plus général. Il se pose la question de déterminer le chemin *effectivement suivi* par la lumière pour aller d'un point à un autre. Ce point de vue permet, par exemple, d'expliquer les rayons courbes et les mirages, ce que les lois de Descartes ne peuvent pas faire.

Cela nous amènera naturellement au cœur mathématique de notre propos : le « Calcul variationnel » d'Euler et Lagrange. C'est un chapitre très riche des mathématiques, mais délibérément nous n'avons pas souhaité l'aborder dans ses détails mathématiques, amplement traités dans la littérature (voir notamment le livre de Jean-Pierre Bourguignon, réf. [7]). Nous souhaitons ici aboutir rapidement aux applications et résultats physiques.

Nous passerons en revue quelques applications pour camper le décor. D'abord, le *principe de moindre action* de Maupertuis. Puis nous verrons quelques applications mécaniques simples, ainsi que des exemples plus originaux. Finalement, nous nous tournerons vers un cas complètement analogue dans son esprit, mais qui fascine par la quantité et la puissance de ses conséquences en comparaison avec la simplicité de l'hypothèse de départ. Il s'agit du fondement de la thermodynamique statistique. En introduisant la technique des multiplicateurs de Lagrange, et le

principe d'équiprobabilité des configurations, nous verrons émerger une définition étonnamment simple de la notion de température, accompagnée de sa propriété première qu'est l'égalisation des températures de systèmes en contact thermique. Puis, nous aboutirons à la définition statistique et absolue de *l'entropie*, due à Boltzmann. Cela nous mènera au principe étonnamment simple : l'équilibre thermodynamique correspond à une situation qui maximise l'entropie, c'est-à-dire le désordre, compte tenu des contraintes. Sa portée dépasse largement le cadre de la physique. Il a notamment constitué, on peut le comprendre, une des pierres angulaires dans la construction de modèles économiques. (Voir, par exemple, Paul Samuelson, [6], dont la thèse, *Foundations of Economics Analysis* repose sur la thermodynamique chimique de Willard Gibbs.)

Le chapitre III est consacré à la mécanique analytique de Lagrange. La fin du XVII^e siècle avait vu le triomphe de la mécanique de Newton, posée en 1687 dans les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton ayant formulé, par ailleurs, la loi universelle d'attraction gravitationnelle, pouvait expliquer le mouvement des corps célestes. Mais on n'en resta pas là. À la suite de la synthèse newtonienne, le XVIII^e et le XIX^e siècles furent marqués par une aventure étonnante où l'on découvrit la véritable structure de la mécanique : une structure *géométrique*. Une large classe de problèmes peuvent être ramenés à de purs problèmes de géométrie.

Le couronnement de ces idées vint avec Lagrange en 1788, un siècle après les *Principia*, Lagrange publia, dans sa *Mécanique analytique*, une nouvelle formulation de la mécanique où il mit en relief cette structure globale et géométrique. La mécanique analytique de Lagrange repose sur le principe de moindre action. Lagrange adopte une façon nouvelle de considérer les problèmes de mécanique. Au lieu de déterminer la position et la vitesse d'une particule à un instant quelconque connaissant son état initial, il se pose la question de déterminer la *trajectoire effectivement suivie* par la particule si, partant d'un point donné à l'instant initial, elle arrive en un certain point à l'instant final. C'est une démarche tout à fait analogue à celle de Fermat pour les rayons lumineux.

Le chapitre IV nous mènera à l'étape suivante et à la formulation dite *canonique* de la mécanique analytique due à Hamilton. Ce formalisme canonique date de 1834. Il est plus commode pour un certain nombre de problèmes, notamment la mécanique du point ou d'ensembles de points. Mais il est surtout d'une richesse impressionnante par ses développements tant mathématiques que physiques. Nous ferons allusion à quantité de retombées des travaux d'Hamilton, notamment en présentant quelques aspects des *systèmes dynamiques*. Ce type de problème physique a, en effet, été une extraordinaire source de découvertes tant en mathématiques qu'en physique. Le fondateur de ce champ d'étude est Henri Poincaré, en 1885, notamment quand il a étudié le problème des 3 corps. Cela mène à des problèmes fascinants : les problèmes limites à $t = \infty$, les attracteurs et les attracteurs étranges, les bifurcations, le chaos etc. L'attracteur étrange le plus célèbre est sans doute l'attracteur de Lorenz, du nom

de son inventeur Edward N. Lorenz qui le découvrit en 1963 à partir d'un modèle mathématique de l'atmosphère, et relança de façon spectaculaire, avec l'effet « aile de papillon » en météorologie, l'intérêt pour le *chaos*, inventé par Poincaré 80 ans plus tôt.

Nous abordons ensuite, avec les *crochets de Poisson*, une structure mathématique, beaucoup plus proche de notre propos. Jacobi considérait que c'était la plus grande découverte de Poisson, qui, pourtant, avait fait des contributions considérables aux mathématiques, aux probabilités, à la mécanique analytique et à l'électrostatique. Nous parviendrons ensuite naturellement à l'étonnante découverte symétrie entre mécanique analytique et mécanique quantique, qui apparaît là.

Le chapitre V est consacré à l'équation d'Hamilton-Jacobi, où l'on choisit d'énoncer les lois de la physique directement à partir de *l'action* et non plus du lagrangien ou de l'hamiltonien. Nous débiterons par l'exposé de la théorie de l'optique géométrique d'Hamilton, grâce à sa *fonction caractéristique* qui est orthogonale aux faisceaux lumineux. Nous verrons comment l'optique géométrique apparaît comme limite de l'optique ondulatoire, ainsi que l'avait compris Hamilton. Passant à la mécanique, Hamilton travaille avec une *fonction principale* qui s'identifie à l'action, exprimée en fonction des coordonnées et moments conjugués, et qui est étonnamment semblable à la fonction caractéristique de l'optique. Nous verrons comment, pour les systèmes d'énergie constante, le faisceau des trajectoires est orthogonal aux surfaces d'action constante. Cela nous fera redécouvrir le principe de Maupertuis sous une forme géométrique. Nous aurons devant les yeux l'analogie entre optique et mécanique, et nous montrerons comment le même cadre de pensée peut être appliqué à la mécanique ondulatoire et à l'équation de Schrödinger.

Au chapitre VI, nous présenterons la formulation lagrangienne de la théorie des champs, vaste problème en lui-même, qui ne peut être véritablement couvert qu'en un traité spécialement conçu pour lui. En effet, le formalisme lagrangien trouve sa pleine puissance lorsque l'on traite de systèmes ayant un nombre de degrés de liberté très grand, voire infini. C'est le cas de la mécanique des milieux continus. Nous verrons comment ce formalisme se prête à la théorie des champs. Dans ce chapitre assez court, nous donnons les principes de la théorie lagrangienne des champs et son application au champ électromagnétique. La théorie classique de la gravitation sort du cadre de ce que nous souhaitons aborder ici.

Au chapitre VII, nous formalisons le problème du mouvement d'une particule libre dans un espace courbe. Le chef-d'œuvre d'Einstein qu'est la relativité générale repose sur l'observation étonnante que deux grandeurs physiques qui n'ont *a priori* aucun rapport, sont égales (ou strictement proportionnelles). Il s'agit, on le sait, des deux acceptions du concept de masse. L'une est celle de coefficient d'inertie ou de résistance à l'accélération d'un corps dans les lois de la dynamique, l'autre est celle de coefficient de couplage au champ de gravitation. Il n'existe aucun argument *a priori* qui explique

le pourquoi de cette égalité. Dans un champ gravitationnel, l'égalité de la masse inertielle et de la masse pesante élimine la masse d'un corps des équations du mouvement. Deux corps placés dans les mêmes conditions initiales ont le même mouvement, quelle que soit leur masse. La prise de conscience de la profondeur de cette constatation a été relativement tardive. L'expérience historique d'Eötvös en 1890 a été constamment reprise. Elle l'est encore maintenant avec des précisions de plus en plus grandes.

L'idée qui sous-tend la relativité générale est que cette égalité devient naturelle si le mouvement que nous nommons « gravitationnel » est, de fait, un mouvement *libre* dans un espace-temps *courbe*. Einstein racontait qu'en 1907, alors qu'il travaillait sur la façon d'incorporer la gravitation newtonienne dans la relativité (celle de l'électromagnétisme ne posant par construction aucun problème) il eut l'idée la plus « heureuse » de sa vie (« glücklichster Gedanke meines Lebens »). Il s'était mis à penser aux impressions de quelqu'un qui tomberait d'un toit ! Pour un tel « observateur » (et, bien entendu, tant qu'il ne rencontre pas d'autre objet) *il n'existe pas de champ gravitationnel* (les italiques sont d'Einstein). S'il « laisse tomber » des objets de ses poches, ceux-ci restent au repos, ou sont en mouvement uniforme par rapport à lui, quelle que soit leur nature physique ou chimique. Nous verrons l'idée de base du « principe d'équivalence » et quelques-unes de ses conséquences, le but de ce chapitre étant d'utiliser le formalisme lagrangien pour montrer comment l'idée de mouvement dans un espace courbe fournit des éléments pour construire une théorie où l'égalité des « deux » masses est réalisée de façon naturelle.

Nous montrerons trois conséquences historiques : la variation de la marche d'une horloge dans un champ gravitationnel, les corrections à la mécanique céleste newtonienne et la déviation de la lumière par le champ gravitationnel.

Ces exemples sont historiques, ils sont également d'une grande actualité. Comme nous le verrons, la déflexion de la lumière par un champ de pesanteur joue un rôle considérable en astrophysique et en cosmologie au travers de l'effet de lentille gravitationnelle. Une application est la recherche de la distribution d'une composante baryonique dans la « masse cachée » ou matière noire de l'univers. Une autre provient de ce que la distribution de masse dans l'univers, masse des galaxies mais aussi la matière noire, agit comme un instrument d'optique permettant d'observer des objets lointains, donc beaucoup plus jeunes. Cet effet est celui d'un télescope cosmique naturel, et l'univers apparaît ainsi comme une galerie de mirages sans fin.

Nous consacrons, enfin, le chapitre VIII à la formulation variationnelle de la mécanique quantique de Feynman. Richard P. Feynman est peut-être le physicien théoricien le plus brillant de la seconde moitié du XX^e siècle. Dans son travail de thèse, soutenu en mai 1942 à Princeton, Feynman cherchait à résoudre le problème des corrections de l'électrodynamique quantique à la masse de l'électron. Ces corrections sont infinies dans une théorie des champs où l'électron est considéré comme une particule ponctuelle. Feynman découvrit un « principe de moindre action » qui lui permettait

de résoudre le problème en utilisant des potentiels pour moitié avancés et pour moitié retardés. À cette fin, il avait introduit le concept mathématique des *intégrales de chemins*, qui n'a cessé d'être développé depuis. Cette méthode connut un premier triomphe lorsqu'elle permit de calculer le déplacement de Lamb des niveaux de l'atome d'hydrogène sans introduire de paramètres de régularisation arbitraires, mais, au contraire, de gérer les termes infinis d'une manière systématique et bien définie. Bien loin d'un simple outil technique, le *Groupe de renormalisation* a révélé, depuis, une profondeur qui le met au premier plan de la physique théorique contemporaine.

Le *principe de Feynman* consiste à poser que, de façon générale, dans un dispositif quelconque, la phase de l'amplitude correspondant à un chemin donné est l'*action classique* le long de ce chemin divisée par la constante de Planck $\hbar$. La somme de toutes les amplitudes réalisant le processus considéré est un objet mathématique compliqué que l'on nomme une *intégrale de chemins*, sur laquelle repose tout le formalisme.

Feynman montre que l'on obtient ainsi les relations d'Einstein et de Broglie, ainsi que l'équation de Schrödinger, les observables et toute la mécanique quantique usuelle. La physique statistique a profité, elle aussi, du concept d'intégrale de chemins. D'innombrables résultats ont été obtenus, et cet outil joue un rôle central dans la théorie quantique des champs contemporaine.

Si l'on considère des systèmes et processus où l'action $S(b, a)$ classique est *macroscopique*, c'est-à-dire beaucoup plus grande que la constante de Planck $\hbar$, la contribution de chemins qui peuvent paraître très proches l'un de l'autre au sens classique, mais tels que la différence de l'action calculée sur ces chemins soit, elle aussi, beaucoup plus grande que $\hbar$, va être, avec une forte probabilité, en interférence destructive. La contribution de l'ensemble de tels chemins à l'intégrale sera par conséquent nulle, chacun annulant la contribution d'un autre. Autrement dit, dans ces conditions, seul contribue un voisinage infinitésimal de la *trajectoire classique*, impossible à scruter expérimentalement dans son détail, du moins pour le moment. La « probabilité » de la trajectoire classique est par conséquent égale à un, celle de toute autre trajectoire imaginable et distinguable expérimentalement de la trajectoire classique est nulle. Il apparaît ainsi un phénomène étonnant : la *mécanique classique* émerge comme la *limite macroscopique* de la mécanique quantique, à partir d'une structure reposant en large part sur des concepts classiques issus du formalisme lagrangien !

Les principes variationnels en physique

par Jean-Louis Basdevant

Les principes variationnels sont présents dans tous les domaines de la physique. Rédigé à l'attention des étudiants en Masters Sciences de la matière et en écoles d'ingénieurs, ce **cours complet** se focalise principalement sur la mécanique analytique de Lagrange et d'Hamilton, essentielle à la culture de tout physicien, et donne des aperçus sur plusieurs de ses extensions. Il est complété par des **démonstrations** ainsi que de **nombreux exercices corrigés**.

Sommaire

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. Le principe physique
« d'économie naturelle » | 6. Théorie lagrangienne des champs |
| 2. Principes variationnels | 7. Mouvement dans un espace courbe |
| 3. La mécanique analytique
de Lagrange | 8. La phase et le principe de Feynman |
| 4. Formalisme canonique d'Hamilton | 9. Solutions des exercices |
| 5. Action, optique,
Équation d'Hamilton-Jacobi | Bibliographie |
| | Index |

Spécialiste de physique théorique des particules élémentaires, de mécanique quantique et d'astrophysique, directeur de recherche honoraire au CNRS, **Jean-Louis Basdevant** a été pendant trente-cinq ans professeur à l'École Polytechnique, dont il a dirigé le département de physique. Il est l'auteur de nombreux ouvrages de référence en physique comme en mathématiques.

ISBN 978-2-311-01098-5



WWW.VUIBERT.FR

