

---

## Partiel du 20/03/2014

*Aucun document n'est autorisé*

*Les calculatrices réglementaires sont autorisées*

*Durée de l'épreuve : 2h*

*Le sujet comprend 2 pages au total*

---

### Questions de cours

- 1/ Énoncer le théorème de Gauss sous sa forme locale ainsi que sous sa forme intégrale. Précisez la signification de chaque terme.
- 2/ Que vaut  $\nabla \times \mathbf{E}$ , où  $\mathbf{E}$  est le champ électrostatique ?
- 3/ Quel est le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait ?
- 4/ Pour un matériau diélectrique de polarisation  $\mathbf{P}$ , donner les expressions des densités surfacique et volumique de charges liées. Préciser la signification de chaque terme.
- 5/ Énoncer le théorème d'Ampère sous sa forme locale ainsi que sous sa forme intégrale. Précisez la signification de chaque terme.
- 6/ Que vaut  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique ?
- 7/ Donner le lien entre le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .
- 8/ Pour un matériau magnétique d'aimantation  $\mathbf{M}$ , donner les expressions des densités volumique et surfacique de courants liés.
- 9/ Exprimer le vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}$  en fonction du champ électrique et de la polarisation.
- 10/ Définir en une équation ce que l'on appelle un matériau diélectrique linéaire.
- 11/ Exprimer le champ auxiliaire  $\mathbf{H}$  en fonction du champ magnétique et de l'aimantation.
- 12/ Définir en une équation ce que l'on appelle un matériau magnétique linéaire.

### Exercice 1

On considère une plaque métallique de densité de charge uniforme  $+\sigma$  se situant dans le plan  $Oxy$ . L'épaisseur de la plaque est négligeable et on considère que son extension dans le plan  $xy$  est infinie.

- 1/ Déterminer grâce aux symétries du système le champ électrique dans tout l'espace.

On place maintenant une seconde plaque métallique de densité de charge uniforme  $-\sigma$  à une distance  $z = d$  de la première plaque. Les deux plaques sont parallèles. On néglige également l'épaisseur de la deuxième plaque et son extension dans les directions  $x$  et  $y$  est infinie.

- 2/ Quel est le nom d'un tel dispositif ?
- 3/ Calculer le champ électrique dans tout l'espace. On utilisera la réponse à la question 1/.
- 4/ En déduire la différence de potentiel électrostatique entre les deux plaques.
- 5/ On considère que chaque plaque est un rectangle de longueur  $\ell$  et de largeur  $w$ , et que les plaques sont séparées d'une distance  $d \ll \ell, w$ . Calculer la capacité  $C$  du dispositif.

*Application numérique :  $\ell = 3.5 \text{ cm}$ ,  $w = 2 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ . On rappelle que la permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .*

## Exercice 2

On considère un cube centré à l'origine dont les arêtes ont pour longueur  $a$ . Le cube est composé d'un matériau diélectrique et porte une polarisation  $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$ , où  $k$  est une constante.

- 1/ Calculer les densités volumiques et surfaciques de charges liées.
- 2/ Vérifier sur cet exemple que la charge liée totale est nulle.
- 3/ En considérant maintenant un diélectrique de volume  $\mathcal{V}$  de forme quelconque, montrer que la charge liée totale est nulle.

## Exercice 3

- 1/ On considère un fil rectiligne infiniment mince et de longueur infinie dans lequel circule un courant stationnaire  $I_1$ . En utilisant les symétries, calculer le champ magnétique à une distance  $r$  perpendiculaire au fil.

*Application numérique* : quelle est la valeur du champ magnétique à une distance  $r = 5$  cm si le courant passant dans le fil est  $I_1 = 4$  A. On rappelle que la perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>.

- 2/ On place maintenant un deuxième fil rectiligne infiniment mince et de longueur infinie parallèlement à une distance  $d$  du premier, dans lequel un courant  $I_2$  circule en sens inverse à  $I_1$ . Déterminer la force par unité de longueur que le premier fil exerce sur le second. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

## Exercice 4

On considère un fil de longueur infinie et de forme cylindrique, parcouru par un courant libre stationnaire  $I$  réparti uniformément en volume. On appelle  $a$  le rayon du cylindre. Le fil est composé d'un matériau magnétique linéaire de susceptibilité magnétique  $\chi_m$ .

- 1/ Déterminer la densité volumique de courant libre  $J_f$ .
- 2/ Calculer le champ auxiliaire  $\mathbf{H}$  en tout point de l'espace.
- 3/ En déduire le champ magnétique  $\mathbf{B}$  en tout point de l'espace, ainsi que l'aimantation  $\mathbf{M}$ .
- 4/ Déterminer tous les courants liés.
- 5/ Quel est le courant lié total ?

## Formulaire

On rappelle qu'en coordonnées cylindriques,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

pour tout champ de vecteur  $\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$ .