Contrôle continu

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée du devoir : 1h
Le sujet comprend 2 pages au total

Échauffement

Calculez (a) la divergence et (b) le rotationnel du champ de vecteur $\mathbf{v} = x^2 y\ \hat{\mathbf{x}} + z^3\ \hat{\mathbf{y}}$.

Exercice 1

Un câble coaxial de longueur ℓ est constitué de deux conducteurs 1 et 2 en forme de cylindres de révolution de même axe Oz. Le conducteur intérieur 1, plein, a un rayon a, le conducteur extérieur 2, creux, a un rayon b. Sur la longueur ℓ, le conducteur 1 porte la charge $+Q$ et le conducteur 2 la charge $-Q$ ($Q > 0$).

1/ Déterminez le champ électrique dans tout l'espace. On supposera que $\ell \gg a, b$ et on négligera donc les effets de bord.

2/ En déduire la différence de potentiel électrostatique entre les deux armatures du condensateur.

3/ En déduire la capacité C de la longueur ℓ de câble.

Exercice 2

On considère deux sphères concentriques de rayons a et b, avec $a < b$, centrées à l'origine des coordonnées O. La couche formée pour $a < r < b$, avec r la coordonnée radiale en sphérique, est composée d'un matériau diélectrique linéaire, de susceptibilité électrique χ_e. On place au centre commun aux deux sphères une charge (libre) q.

1/ En utilisant la symétrie du système, déterminez le vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ dans tout l'espace.

2/ En déduire le champ électrique dans tout l'espace.

3/ Déduire de la question 2/ que la polarisation du matériau a pour expression

$$\mathbf{P} = \frac{q\chi_\mathrm{e}}{4\pi(1+\chi_\mathrm{e})}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{1}$$

4/ À partir de l'Eq. (1), déterminez les densités volumique et surfacique de charges liées.

5/ Vérifiez que la charge *totale* du système est bien égale à q.

Rappel : en coordonnées sphériques,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{v}(r,\theta,\varphi) = v_r\,\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

Exercice 3

1/ On considère un fil rectiligne infiniment mince et de longueur infinie dans lequel circule un courant stationnaire I_1. En utilisant les symétries, calculer le champ magnétique à une distance r perpendiculaire au fil.

2/ On place maintenant un deuxième fil rectiligne infiniment mince et de longueur infinie parallèlement à une distance d du premier, dans lequel un courant I_2 circule en sens *inverse* à I_1. Déterminer la force par unité de longueur que le premier fil exerce sur le second. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?