Contrôle continu

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée du contrôle : 1h
Le sujet comprend 1 page au total

Exercice 1 : analyse vectorielle

Soit le champ de vecteur $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + y^2\,\hat{\mathbf{z}}$ défini en coordonnées cartésiennes.

1/ Calculez la divergence de $\mathbf{v}$.

2/ Calculez le rotationnel de $\mathbf{v}$.

3/ Calculez l'intégrale curviligne du champ de vecteur $\mathbf{v}$ de l'origine des coordonnées au point $(1,1,1)$ du repère cartésien $(Oxyz)$ selon le chemin $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$.

4/ Est-ce que votre réponse à la question précédente dépend du chemin emprunté ? Commentez.

Exercice 2 : magnétostatique

On considère un cylindre de rayon R supposé infini dont l'axe de révolution est orienté selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$. Le cylindre est parcouru par un courant stationnaire et uniforme, de densité volumique $\mathbf{J} = J\,\hat{\mathbf{z}}$.

1/ Énoncez dans le cas général le théorème d'Ampère sous sa forme locale et intégrale.

2/ Calculez le champ magnétique créé par le cylindre en tout point de l'espace en fonction de J.

3/ On considère à présent que l'on a creusé une cavité cylindrique d'axe parallèle à Oz, de rayon $R' < R$ et entièrement contenue dans le cylindre précédent. En utilisant le principe de superposition (que l'on énoncera), calculez le champ magnétique en tout point de l'espace de cette configuration.

Exercice 3 : électrostatique

Soient trois sphères de rayon a et portant chacune une charge totale Q. La première sphère est composée d'un conducteur supposé parfait, la seconde renferme une densité de charge ρ_0 uniformément répartie dans son volume, et la troisième renferme une densité de charge à symétrie sphérique variant radialement comme $\rho(r) = Cr^n$ avec $n > -3$, où r est le module du rayon vecteur $\mathbf{r}$ en coordonnées sphériques et C une constante.

1/ Énoncez dans le cas général le théorème de Gauss sous sa forme locale et sous sa forme intégrale.

2/ Déterminez les champs électriques en tout point de l'espace pour chacune des trois sphères. Vous exprimerez vos résultats en fonction de Q.

3/ Tracez l'allure des modules des champs électriques en fonction de r pour les trois sphères, en prenant $n = -2$, puis $n = +2$ pour la troisième sphère.

4/ Pour chacune des trois sphères, calculez le potentiel électrostatique.

5/ Pour chacune des trois sphères, calculez l'énergie électrostatique.