Contrôle continu

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée du contrôle : 1h
Le sujet comprend 1 page au total

Échauffement

1/ Soit **r** le rayon vecteur défini dans l'espace tridimensionnel. Calculez $\nabla \cdot \mathbf{r}$ et $\nabla \times \mathbf{r}$.

2/ Montrez que la divergence du rotationnel d'un champ de vecteur est toujours nulle.

Exercice 1 : câble coaxial

Une ligne coaxiale supposée de longueur infinie est réalisée à l'aide d'un fil conducteur cylindrique de section circulaire d'axe Oz (rayon r_1) entouré d'un deuxième conducteur coaxial [rayon intérieur r_2 (avec $r_2 > r_1$) et rayon extérieur r_2']. Les deux conducteurs sont séparés par le vide. Le conducteur central est parcouru par un courant stationnaire I dont le retour est assuré par le conducteur périphérique. Les densités de courants volumiques correspondants au câble intérieur J_{int} et extérieur J_{ext} sont uniformes.

1/ Énoncez dans le cas général le théorème d'Ampère sous sa forme locale et intégrale.

2/ Déterminez J_{int} et J_{ext} en fonction de I et des données du problème.

3/ Calculez le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ créé dans tout l'espace par le système décrit ci-dessus. Vous exprimerez votre résultat en fonction de I.

4/ Esquissez l'allure de $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$.

Exercice 2 : sphère conductrice chargée dans une coquille diélectrique

Une sphère conductrice, de rayon R_1 et de charge Q, est placée dans une coquille diélectrique (de permittivité relative ε_{r}) globalement neutre, de rayon R_2. Dans la suite de l'exercice, on considère que le conducteur est assimilable à un conducteur parfait.

1/ Calculez le champ auxiliaire **D** dans tout l'espace.

2/ Déterminez le champ électrique **E** ainsi que la polarisation **P** dans tout l'espace. En déduire les densités volumiques et surfaciques de charges liées.

3/ Calculez le potentiel électrostatique V dans tous l'espace.

4/ Calculez l'énergie W d'une telle configuration électrostatique.

Formulaire

On rappelle qu'en coordonnées sphériques, la divergence d'un champ de vecteur $\mathbf{v} = v_r\,\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ s'exprime comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}.$$