Examen final du 11/05/2015

Aucun document n'est autorisé
Durée totale de l'examen : 3h
Le sujet comprend 2 pages au total

Questions de cours

1/ Quels sont le champ électrique et la densité de charge totale à l'intérieur d'un conducteur parfait ?

2/ Pour un matériau diélectrique de polarisation $\mathbf{P}$, donne les expressions des densités surfacique et volumique de charges liées.

3/ Exprimer le vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}$ en fonction du champ électrique et de la polarisation.

4/ Définir en une équation ce que l'on appelle un matériau diélectrique linéaire.

Exercice 1 : électrostatique dans le vide

On considère, dans le vide, le champ électrostatique $\mathbf{E}(P)$ créé, au point P, par une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O. On pose $\mathbf{OP} = \mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$. Ce champ électrique est radial et ne dépend que de r : $\mathbf{E}(P) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. La valeur algébrique $E(r)$ est définie par

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{2\epsilon_0}, & 0 \leqslant r \leqslant R, \\[2mm] \dfrac{kR^2}{2\epsilon_0 r^2}, & r > R, \end{cases}$$

où k et R sont des constantes positives, et où ϵ_0 est la permittivité du vide.

1/ Déterminez le potentiel électrostatique $V(r)$ de cette distribution de charges dans tout l'espace. On pourra poser que $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$.

2/ Tracez l'allure des courbes représentative des fonctions $E(r)$ et $V(r)$.

3/ Déterminez la charge volumique $\rho(r)$ de cette distribution de charges, pour tout r.

4/ Tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction $\rho(r)$.

5/ En déduire, en fonction de k et de R, la charge totale q de cette répartition de charges à symétrie sphérique.

6/ Montrez que pour $r > R$, cette distribution volumique est équivalente, d'un point de vue électrostatique, à une charge électrique ponctuelle q placée en O.

Exercice 2 : magnétostatique dans la matière

On considère un fil de longueur infinie et de forme cylindrique, parcouru par un courant libre stationnaire I réparti uniformément en volume. On appelle a le rayon du cylindre. Le fil est composé d'un matériau magnétique linéaire de susceptibilité magnétique χ_m.

1/ Déterminer la densité volumique de courant libre J_f.

2/ Calculer le champ auxiliaire $\mathbf{H}$ en tout point de l'espace.

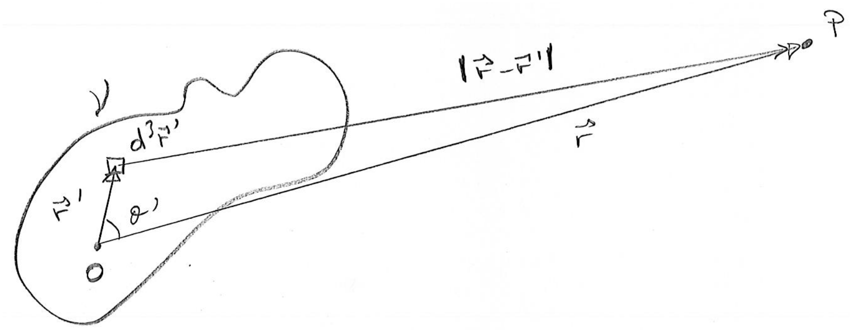
3/ En déduire le champ magnétique $\mathbf{B}$ en tout point de l'espace, ainsi que l'aimantation $\mathbf{M}$.

4/ Déterminer tous les courants liés.

5/ Quel est le courant lié total ?

Exercice 3 : expansions multipolaires

On considère une distribution tri-dimensionnelle de charges de forme quelconque, de volume $\mathcal{V}$ et caractérisée par une densité de charge $\rho(\mathbf{r}')$. Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression approchée du champ électrique produit par une telle distribution de charge au point P situé à une grande distance r de l'origine O des coordonnées (voir figure ci-dessous). Pour ce faire, on supposera que $r \gg r'$, où $\mathbf{r}'$ est le vecteur localisant tous les points sources appartenant à la distribution de charge.



On rappelle que le potentiel électrostatique au point P a pour expression

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{1}$$

1/ Justifiez brièvement du fait que $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}$, où θ' est l'angle entre les deux vecteur $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ (voir figure).

2/ En vous limitant à un développement de Taylor au premier ordre en $r'/r \ll 1$, montrez que le potentiel électrostatique (1) a pour expression approchée

$$V(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

où l'on explicitera Q et $\mathbf{p}$. Quelle est la signification physique de ces deux derniers termes ?

3/ En déduire l'expression du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ au point P. Pour fixer les idées, on supposera que $\mathbf{p} = p\,\hat{\mathbf{z}}$ et l'on travaillera en coordonnées sphériques.

Formulaire

En coordonnées sphériques, on rappelle que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

pour toute fonction scalaire $f(r,\theta,\varphi)$ et pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} = v_r\,\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

On rappelle qu'en coordonnées cylindriques,

$$\nabla\times\mathbf{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} = v_r\,\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z\,\hat{\mathbf{z}}$.