TD 3
Magnétostatique — Rappels et compléments

Exercice 3.1

Une particule de charge q venant de la gauche pénètre dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ dirigé vers la feuille. La trajectoire de la particule est alors déviée vers le haut. Quel est le signe de la charge q ?

Exercice 3.2

Déterminez et esquissez la trajectoire de la particule étudiée dans l'Exemple 3.2 du cours si elle démarre de l'origine avec la vitesse

(a) $\mathbf{v}(0) = (E/B)\hat{\mathbf{y}}$;

(b) $\mathbf{v}(0) = (E/2B)\hat{\mathbf{y}}$;

(c) $\mathbf{v}(0) = (E/B)(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$.

Exercice 3.3

Supposons qu'un champ magnétique de la forme $\mathbf{B} = kz\,\hat{\mathbf{x}}$ règne dans tout l'espace, avec k une constante. Déterminez la force exercée sur une boucle de courant carrée (de côté a) se trouvant dans le plan yz et centrée à l'origine si celle-ci est parcourue par un courant I dans le sens anti-horaire (en regardant la boucle des x positifs).

Exercice 3.4

Un courant stationnaire I parcourt un fil (cylindrique) de rayon a.

(a) Si le courant est uniformément réparti sur la surface, quelle est la densité surfacique de courant K ?

(b) Si le courant est distribué de telle sorte que la densité volumique de courant J est inversement proportionnelle à la distance à l'axe, quelle est l'expression de J ?

Exercice 3.5

(a) Un phonographe porte une densité surfacique de charge uniforme σ. Si le phonographe tourne à une vitesse angulaire constante ω, quelle est la densité surfacique de courant K ?

(b) Une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, de charge totale Q, est centrée à l'origine et tourne sur elle-même autour de l'axe z à une vitesse angulaire constante ω. Déterminez la densité de courant $\mathbf{J}$ en tout point de l'espace intérieur à la sphère.

Exercice 3.6

Pour une configuration de charges et de courants confinés dans un volume $\mathcal{V}$, montrez que

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, \mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t},$$

où $\mathbf{p}$ est le moment dipolaire total.

Exercice 3.7

(a) Déterminez le champ magnétique au centre d'une boucle carrée parcourue par un courant stationnaire I. On appellera R la distance du centre au côté.

(b) Même question pour un polygone régulier à n côté.

(c) Vérifiez que le résultat de la question (b) se ramène à celui d'une boucle circulaire lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3.8

Déterminez le champ magnétique au point P pour chacune des configurations de la Fig. 1.

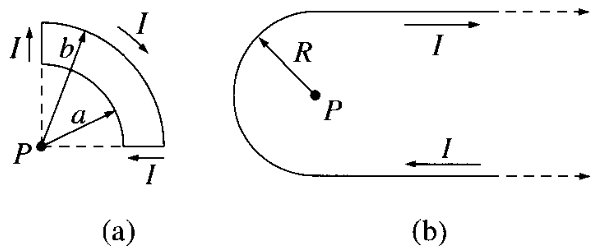

FIG. 1: © D. J. Griffiths

Exercice 3.9

Déterminez la force exercée sur la boucle carrée de côté a de la Fig. 2 située à une distance s d'un fil infiniment long. Le fil et la boucle sont parcourus par un courant stationnaire I.

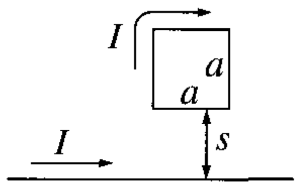

FIG. 2: © D. J. Griffiths

Exercice 3.10

On considère le solénoïde de la Fig. 3, comportant n spires par unité de longueur enroulées autour d'un tube cylindrique de rayon a et parcourues par un courant I. Exprimez le champ magnétique au point P en fonction de θ_1 et θ_2. Supposez que les spires sont essentiellement circulaires, et utilisez le résultat démontré en cours pour le champ produit par une boucle circulaire de courant. Quel est le champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde infini ?

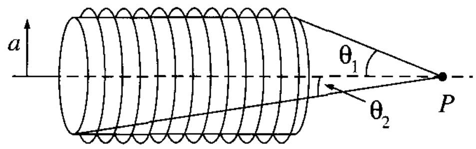

FIG. 3: © D. J. Griffiths

Exercice 3.11

Un courant stationnaire I parcourt un long cylindre de rayon a. Calculez le champ magnétique résultant (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre) si

(a) le courant est uniformément distribué sur la surface du cylindre ;

(b) le courant est distribué de telle sorte que $J \propto r$, où r est la distance à l'axe.

Exercice 3.12

Une plaque épaisse s'étendant de $z = -a$ à $z = a$ porte un courant volumique uniforme $\mathbf{J} = J\,\hat{\mathbf{x}}$ (voir Fig. 4). Déterminez le champ magnétique en fonction de z, à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque.

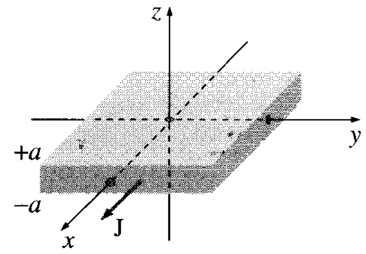

FIG. 4: © D. J. Griffiths

Exercice 3.13

Deux long solénoïdes coaxiaux sont tous deux parcourus par un courant I, en direction opposé (voir Fig. 5). Le solénoïde interne (de rayon a) comporte n_1 spires par unité de longueur, celui externe (de rayon b) en comporte n_2. Calculez $\mathbf{B}$ dans les trois régions suivantes : (i) à l'intérieur du solénoïde interne ; (ii) entre les deux solénoïdes ; (iii) à l'extérieur des deux.

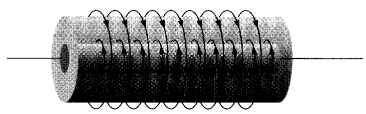

FIG. 5: © D. J. Griffiths

Exercice 3.14

La loi d'Ampère est-elle en accord avec le fait que la divergence du rotationnelle d'un champ de vecteurs est toujours nulle ? Montrez que la loi d'Ampère ne *peut pas* être valide en général. Y a-t-il d'autres « défauts » de la sorte avec les trois autres équations de Maxwell ?

Exercice 3.15

Déterminez le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ d'un segment droit de fil parcouru par un courant I. On supposera que le fil se situe le long de l'axe z, de z_1 à z_2. Vérifiez votre résultat en calculant le champ magnétique résultant.

Exercice 3.16

Quelle est la densité de courant résultant du potentiel vecteur $\mathbf{A} = k\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ en coordonnées cylindriques (k est une constante).

Exercice 3.17

Si $\mathbf{B}$ est *uniforme*, montrez que $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ est bien un potentiel vecteur possible, c'est-à-dire, montrez que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ et $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Exercice 3.18

Déterminez le potentiel vecteur partout dans l'espace pour l'Exemple 3.8 du cours.

Exercice 3.19

Dans le cours, nous avons démontré que le potentiel vecteur a pour expression

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\eta}, \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

(a) Montrez que l'Eq. (1) est consistante avec $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

(b) Montrez que l'Eq. (1) donne bien la loi de Biot-Savart $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}$.

Exercice 3.20

(a) Vérifiez les relations de passage du champ magnétique pour l'Exemple 3.9 du cours.

(b) Vérifiez les relations de passage du potentiel vecteur pour l'Exemple 3.10 du cours.

Exercice 3.21

Dans le cours, nous avons montré que le champ créé par un dipôle magnétique idéal $\mathbf{m}$ a pour expression

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \, \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \tag{2}$$

Montrez que l'Eq. (2) peut être réécrite sans faire usage d'un système de coordonnées de la façon suivante :

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]. \tag{3}$$

Exercice 3.22

Une boucle circulaire de courant (rayon R) se trouvant dans le plan xy et centrée à l'origine est parcourue par un courant I dans le sens anti-horaire (vu des z positifs).

(a) Quel est le moment magnétique dipolaire ?

(b) Quel est le champ magnétique (approximatif) à une distance $r \gg R$?

(c) Montrez que pour des points le long de l'axe z, le résultat de la question (b) correspond au résultat *exact* (cf. Exemple 3.6).

Exercice 3.23

Calculez le moment magnétique dipolaire du dispositif de l'Exercice 3.5(a).

Exercice 3.24

Dans le cours, nous avons développé en multipôles le potentiel vecteur produit par une boucle de courant. On cherche ici à « traduire » les expressions obtenues pour une distribution de courant volumique $\mathbf{J}$.

(a) Développez le potentiel vecteur au deuxième ordre en multipôles.

(b) Montrez que le monopôle magnétique est nul.

(c) Montrez que le dipôle magnétique s'écrit

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d\tau \, (\mathbf{r} \times \mathbf{J}).$$