# TD 4
# Champs magnétiques dans la matière

## Exercice 4.1

Calculez le couple exercé sur la boucle carrée de la Fig. 1 dû à la boucle circulaire (supposez que $r \gg a, b$).

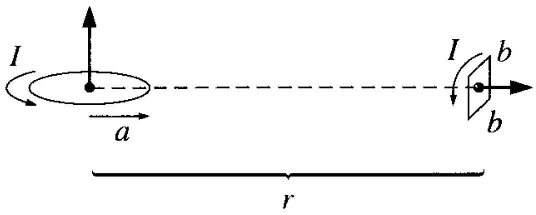


FIG. 1: © D. J. Griffiths

## Exercice 4.2

En partant de l'expression de la force de Lorentz $\mathbf{F} = \int I(\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, montrez que le couple exercé par *n'importe quelle* distribution de courant stationnaire (pas seulement une boucle carrée comme dans le cours) dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ s'écrit $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$.

## Exercice 4.3

Démontrez que la force exercée par un champ magnétique $\mathbf{B}$ sur un dipôle magnétique s'écrit $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$. Pour ce faire, supposez que le dipôle est une boucle carrée infinitésimale, de côté $\epsilon$ (cf. Fig. 3), et calculez $\mathbf{F} = I \int \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ en effectuant un développement de Taylor de $\mathbf{B}$ pour $\epsilon$ petit.

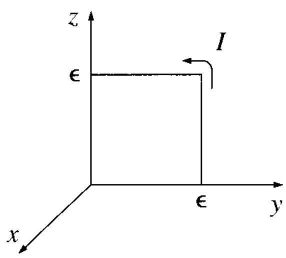


FIG. 2: © D. J. Griffiths

## Exercice 4.4

Déterminez la force d'attraction entre deux dipôles magnétiques $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ séparés de la distance $r$ et orientés comme sur la Fig. 3.

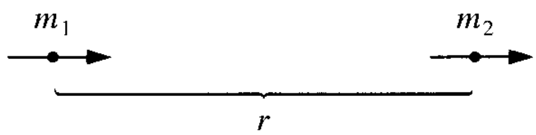


FIG. 3: © D. J. Griffiths

## Exercice 4.5

On considère une plaque épaisse parallèle au plan $yz$ et s'étendant de $x = -a$ à $x = a$. La plaque est parcourue par une densité de courant uniforme $\mathbf{J} = J_0\hat{\mathbf{z}}$, et un dipôle magnétique $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{x}}$ se situe à l'origine.

(a) Déterminez la force exercée sur le dipôle.

(b) Même question si $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$.

(c) Dans le cas *électrostatique*, les expressions $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ et $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ sont équivalentes (prouvez-le !), alors que ceci n'est pas le cas en magnétostatique. Pourquoi ? En guise d'exemple, calculez $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ pour les configurations des questions (a) et (b).

## Exercice 4.6

Un cylindre infiniment long de rayon $R$ présente une aimantation uniforme $\mathbf{M}$ parallèle à son axe. Déterminez le champ magnétique (dû à $\mathbf{M}$) en tout point de l'espace.

## Exercice 4.7

Un cylindre infiniment long et de rayon $R$ porte une aimantation (en coordonnées cylindriques) $\mathbf{M} = kr^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$, avec $k$ une constante. Déterminez le champ magnétique dû à $\mathbf{M}$ en tout point de l'espace.

## Exercice 4.8

Un cylindre de rayon $a$ et de longueur $L$ porte une aimantation permanente uniforme $\mathbf{M}$ parallèle à son axe. Déterminez les courants liés, et représentez le champ magnétique résultant dans les deux cas suivants : (i) $L \gg a$ et (ii) $L \ll a$. Comparez cet aimant à l'« électret » de l'Exercice 2.10.

## Exercice 4.9

Un cylindre infiniment long de rayon $R$ porte une aimantation permanente $\mathbf{M} = kr\,\hat{\mathbf{z}}$ parallèle à son axe, où $k$ est une constante et où l'on utilise les coordonnées cylindriques usuelles. Il n'y a pas de courant libre dans le système. Déterminez le champ magnétique dans tout l'espace par les deux méthodes suivantes :

(a) Localisez les courants liés et en déduire le champ que ceux-ci produisent.

(b) Utilisez la loi d'Ampère sous sa forme $\oint \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{H} = I_{\mathrm{f,in}}$ afin de déterminer $\mathbf{H}$, et déduisez-en $\mathbf{B}$.

Remarquez que la deuxième méthode est bien plus rapide, et ne requiert pas la connaissance des courants liés.

## Exercice 4.10

Supposons que le champ à l'intérieur d'un matériau magnétique infini soit $\mathbf{B}_0$, de telle sorte que $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0 - \mathbf{M}$. On creuse dans ce matériau une cavité sphérique. Déterminez le champ $\mathbf{B}$ au centre de la cavité en fonction de $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{M}$. Déterminez également $\mathbf{H}$ en fonction de $\mathbf{H}_0$ et $\mathbf{M}$. Comparez vos résultats à l'Exercice 2.14. [*Indication :* Supposez que la cavité est suffisamment petite de telle sorte que $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{H}_0$ soient uniformes. Notez également que creuser une cavité dans un diélectrique est similaire à superposer un objet de même forme mais d'aimantation *opposée*.]

## Exercice 4.11

Un câble coaxial consiste en deux cylindres infinis (rayons $a$ et $b > a$), séparés par une couche d'un matériau magnétique linéaire de susceptibilité magnétique $\chi_m$ (pour $a < r < b$). Un courant stationnaire parcourt le conducteur interne et retourne (dans le sens opposé) sur la surface de câble coaxial. Déterminez le champ magnétique dans la région entre les tubes. Comme vérification de votre résultat, calculez l'aimantation et les courants liés, et confirmez (en prenant bien sûr également en compte les courants libres !) qu'ils génèrent bien le bon champ.

## Exercice 4.12

Un courant $I$ parcourt un long fil droit, de rayon $a$. Si le fil est composé d'un matériau magnétiquement linéaire (par exemple, du cuivre ou de l'aluminium) de susceptibilité $\chi_m$, et que le courant est réparti uniformément en volume, quel est le champ magnétique à une distance $r$ de l'axe ? Déterminez tous les courants liés. Quel est le courant lié total ?

## Exercice 4.13

Une sphère composée d'un matériau magnétique linéaire est placé dans un champ magnétique externe uniforme $\mathbf{B}_0$. Déterminez le champ résultant à l'intérieur de la sphère. [*Indication :* inspirez-vous de l'Exercice 2.18.]

## Exercice 4.14

(a) Montrez que l'énergie d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est donnée par

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

Comparez à l'Exercice 2.6.

(b) Montrez que l'énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques séparés par un vecteur $\mathbf{r}$ est donné par

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\right].$$

Comparez à l'Exercice 2.7.

(c) Exprimez le résultat de la question (b) en fonction de $\theta_1$ et $\theta_2$, les angles que forment $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ avec $\mathbf{r}$. Utilisez l'expression de $U$ résultante pour déterminer la configuration stable que les deux dipôles adopteraient s'ils étaient libres de tourner (tout en restant à une distance fixe).

(d) Supposons que l'on ait à notre disposition une grande quantité d'aiguilles de boussole, que l'on monte sur des épingles et à distance égale l'une de l'autre. Dessinez la configuration qu'adopte les aiguilles (on négligera le champ magnétique terrestre).

## Exercice 4.15

Dans le cours, nous avons vu que :

– le champ électrique a pour expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}; \tag{1}$$

– le potentiel scalaire d'un matériau polarisé s'écrit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}; \tag{2}$$

– le potentiel vecteur d'un matériau aimanté s'exprime comme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}. \tag{3}$$

Remarquez que si $\rho$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ sont *uniformes*, les Eqs. (1), (2) et (3) impliquent toutes la même intégrale

$$\int d\tau' \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}}{\eta^2}.$$

De ce fait, si l'on connait le champ électrique d'un objet uniformément chargé, on peut immédiatement déterminer le potentiel scalaire d'un objet uniformément polarisé et le potentiel vecteur d'un objet uniformément aimanté *de même forme*. On appelle cette méthode la *méthode des champs auxiliaires*. Utilisez cette dernière afin d'obtenir $V$ à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère uniformément polarisée (cf. Exemple 2.2 du cours), et $\mathbf{A}$ à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère uniformément aimanté (cf. Exemple 4.1 du cours).