TD 5
Électrodynamique

Exercice 5.1

Deux couches sphériques concentriques métalliques (rayons a et b, $a < b$) sont séparées par un matériau faiblement conducteur, de conductivité σ.

(a) Si elles sont maintenues à une différence de potentiel V, quel courant circule d'une couche à l'autre ?

(b) Quelle est la résistance entre les couches ?

Exercice 5.2

Une capacité C a été chargée à un potentiel V_0. À l'instant $t = 0$, la capacité est connectée à une résistance R et commence à se décharger [voir Fig. 1(a)].

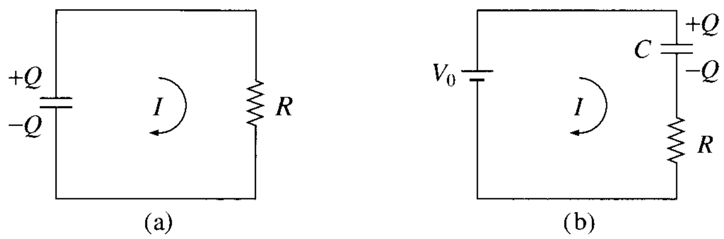

Fig. 1: © D. J. Griffiths

(a) Déterminez la charge sur la capacité en fonction du temps, $Q(t)$. Quel est le courant à travers la résistance, $I(t)$?

(b) Quelle était l'énergie originale stockée dans la capacité ? En intégrant $P = VI = I^2R$, confirmez que la chaleur délivrée à la résistance est égale à l'énergie perdue par la capacité.

Imaginons maintenant que l'on *charge* la capacité en la connectant (ainsi que la résistance), à $t = 0$, à une batterie maintenue à un voltage V_0 [cf. Fig. 1(b)].

(c) Déterminez à nouveau $Q(t)$ et $I(t)$.

(d) Calculez l'énergie totale délivrée par la batterie, $\int \mathrm{d}t\, V_0 I$. Déterminez la chaleur délivrée à la résistance. Quelle est l'énergie finale stockée dans la capacité ? Quelle fraction du travail délivré par la batterie se retrouve comme énergie dans la capacité ? [Notez que la réponse est indépendante de R !]

Exercice 5.3

(a) Deux objets métalliques sont immergés dans un milieu faiblement conducteur, de conductivité σ (Fig. 2). Montrez que la résistance entre les deux objets est reliée à la capacité du dispositif par $R = \epsilon_0/\sigma C$.

(b) Supposons maintenant qu'une batterie est connectée entre les objets 1 et 2 et que celle-ci charge le dispositif à une différence de potentiel V_0. Si l'on débranche la batterie, la charge va alors graduellement s'écouler. Montrez que $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$ et déterminez la constante de temps τ en fonction de ϵ_0 et σ.

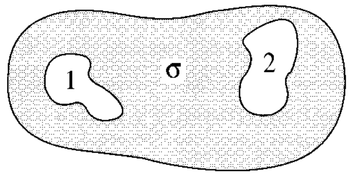

FIG. 2: © D. J. Griffiths

Exercice 5.4

Supposons que la conductivité du matériau séparant les cylindres de l'Exemple 5.2 du cours soit non-uniforme. En particulier, considérons que $\sigma(r) = k/r$, avec k une constante. Calculez la résistance entre les deux cylindres.

Exercice 5.5

Une batterie de force électromotrice $\mathcal{E}$ et de résistance interne r est accrochée à une résistance de « charge » R. Si vous voulez délivrer une puissance maximale à cette dernière, quelle résistance R devez-vous choisir ? (Vous ne pouvez bien sûr pas changer $\mathcal{E}$ et r !)

Exercice 5.6

Une boucle rectangulaire de courant est placée de telle sorte que l'un des côtés (de hauteur h) se situe entre les plaques d'un condensateur plan (Fig. 3), orienté parallèle au champ **E**. L'autre côté se situe à l'extérieur, où le champ est essentiellement nul. Quelle est la force électromotrice dans la boucle ? Si la résistance totale de la boucle est R, quel est le courant circulant dans celle-ci ?

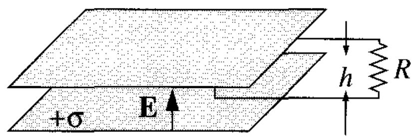

FIG. 3: © D. J. Griffiths

Exercice 5.7

Une barre métallique de masse m glisse sans friction sur deux rails parallèles conducteurs séparés d'une distance l (Fig. 4). Une résistance R est connectée entre les rails, et un champ magnétique uniforme **B** pointant vers la feuille rempli tout l'espace.

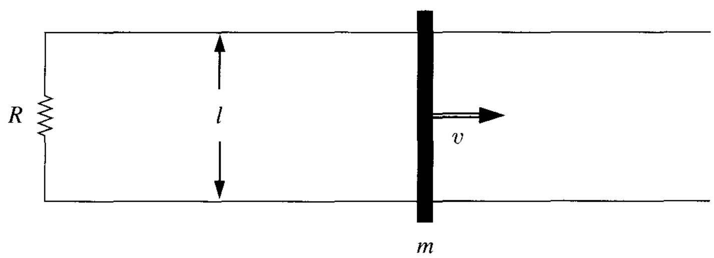

FIG. 4: © D. J. Griffiths

(a) Si la barre se déplace vers la droite à une vitesse v, quel est le courant au travers de la résistance ? Quel est sa direction ?

(b) Quelle est la force magnétique exercée sur la barre ? Dans quelle direction ?

(c) Si la barre démarre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse v_0, quelle est sa vitesse à l'instant t ?

(d) L'énergie cinétique initiale de la barre est, bien sûr, $\frac{1}{2}mv_0^2$. Vérifiez que l'énergie délivrée à la résistance est exactement $\frac{1}{2}mv_0^2$.

Exercice 5.8

Une boucle carrée (côté a) se situe à une distance s d'un fil de longueur infini parcouru par un courant I (Fig. 5).

(a) Trouvez le flux du champ $\mathbf{B}$ au travers de la boucle.

(b) Si l'on éloigne maintenant verticalement la boucle du fil à une vitesse v, quelle force électromotrice est générée ? Dans quelle direction le courant s'écoule-t-il (sens horaire ou anti-horaire) ?

(c) Que se passe-t-il si l'on tire maintenant la boucle vers la droite, et non vers le haut ?

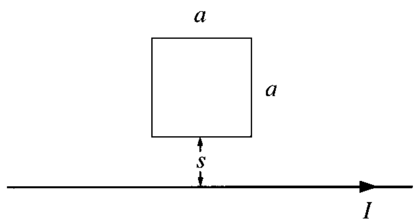

FIG. 5: © D. J. Griffiths

Exercice 5.9

Considérez le dispositif de la Fig. 6 : une boucle carrée de côté a tournant à une vitesse angulaire ω dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ pointant vers la droite. Déterminez la force électromotrice $\mathcal{E}(t)$ de ce générateur de courant *alternatif*.

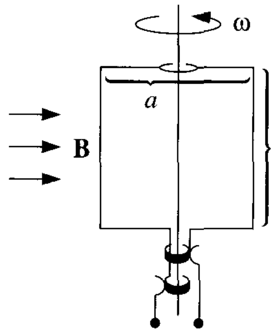

FIG. 6: © D. J. Griffiths

Exercice 5.10

Un long solénoïde de rayon a est parcouru par un courant alternatif tel que le champ magnétique en son intérieur soit sinusoïdal : $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$. Une boucle circulaire, de rayon $a/2$ et de résistance R, est placée de façon coaxiale à l'intérieur du solénoïde. Déterminez le courant induit dans la boucle en fonction du temps.

Exercice 5.11

Une boucle de courant carrée, de côté a, se situe dans le premier quadrant du plan xy, avec l'un de ses coins à l'origine. Dans cette région règne un champ magnétique non-uniforme et dépendant du temps, $\mathbf{B}(y,t) = ky^3t^2\,\hat{\mathbf{z}}$, avec k une constante. Calculez la force électromotrice induite dans la boucle.

Exercice 5.12

Un solénoïde infiniment long de rayon a comporant n spires par unité de longueur est parcouru par un courant dépendant du temps $I(t)$ dans la direction $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Déterminez le champ électrique (magnitude *et* direction) à une distance r de l'axe, à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, dans l'approximation quasistatique (approximation des régimes quasi stationnaires).

Exercice 5.13

Un courant alternatif $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ parcourt un long fil rectiligne, et retourne le long d'un tube coaxial de rayon a.

(a) Dans quelle direction le champ électrique induit pointe-t-il ?

(b) Supposant que le champ électrique s'annule à l'infini, déterminez $\mathbf{E}(r, t)$.

Exercice 5.14

Un solénoïde infiniment long, de rayon a et comportant n spires par unité de longueur, est entouré par un fil de résistance R (Fig. 7).

(a) Si le courant dans le solénoïde augmente au cours du temps de façon constante ($\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = k$), quel courant parcourt la boucle, et dans quel sens ?

(b) Si le courant dans le solénoïde est constant, mais que l'on tire celui-ci hors de la boucle et que l'on le réinsère dans la direction opposée, quelle est la charge totale passant au travers de la résistance ?

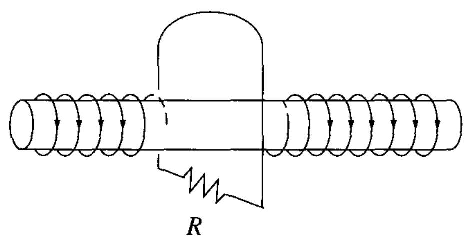

FIG. 7: © D. J. Griffiths

Exercice 5.15

Une boucle carrée, de rayon a et de résistance R, se trouve à une distance s d'un fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant I (Fig. 8). À un certain moment, quelqu'un coupe le fil de telle sorte que le courant chute à zéro. Dans quelle direction le courant induit dans la boucle s'écoule-t-il, et quelle charge totale passe en un point donné de la boucle pendant que le courant s'écoule ? Si vous n'aimez pas le modèle du ciseau, supposez que l'on coupe le courant graduellement de la sorte :

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I, & 0 \leqslant t \leqslant 1/\alpha, \\ 0, & t > 1/\alpha. \end{cases}$$

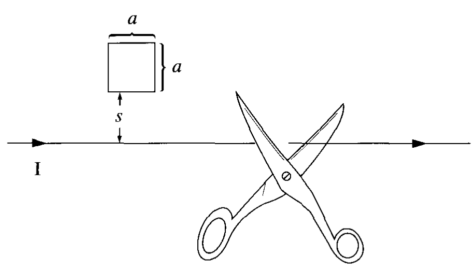

FIG. 8: © D. J. Griffiths

Exercice 5.16

Une petite boucle de courant (de rayon a) se trouve à une distance z au-dessus du centre d'une grande boucle (de rayon b), cf. Fig. 9. Les plans formés par les deux boucles sont parallèles, et perpendiculaires à l'axe commun.

(a) Supposez qu'un courant I_1 circule dans la grande boucle. Déterminez le flux ϕ_2 au travers de la petite boucle. (La petite boucle est si petite que vous pouvez considérez le champ de la grande boucle comme essentiellement constant.)

(b) Supposez maintenant qu'un courant I_2 circule dans la petite boucle. Déterminez le flux ϕ_1 au travers de la grande boucle. (La petite boucle est si petite que vous pouvez la traitez comme un dipôle magnétique.) [*Indication :* utilisez le théorème de Stokes pour calculer ϕ_1.]

(c) Déterminez l'inductance mutuelle du système, et confirmez que $M_{12} = M_{21}$.

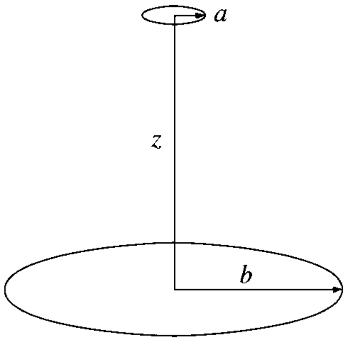

FIG. 9: © D. J. Griffiths

Exercice 5.17

Une boucle carrée de courant, de côté a, se situe à mi-chemin entre deux fils très longs, séparés d'une distance $3a$. (En réalité, les fils forment les côtés longs d'une grande boucle rectangulaire, mais les deux côtés courts sont si éloignés qu'ils peuvent être négligés.) Un courant I circulant dans le sens des aiguilles d'une montre dans la boucle carrée augmente graduellement, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = k$, avec k une constante. Déterminez la force électromotrice induite dans la grande boucle rectangulaire. Dans quel sens le courant induit circule-t-il ?

Exercice 5.18

Calculez l'inductance propre par unité de longueur d'un solénoïde infiniment long, de rayon R et comportant n spires par unité de longueur.

Exercice 5.19

Essayez de déterminer l'inductance propre de l'épingle à cheveux de la Fig. 10. (Négligez la contribution des extrémités ; la plus part du flux provient des longues parties rectilignes.) En faisant cela, vous allez tombez sur une absurdité, caractéristique de beaucoup de calculs d'inductances propres. Reprenez le calcul en supposant cette fois que le fil a un rayon infinitésimal ϵ et en négligeant le flux au travers du fil.

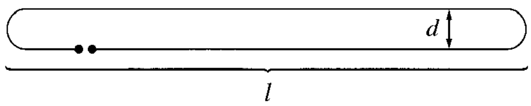

FIG. 10: © D. J. Griffiths

Exercice 5.20

Une capacité C est chargé à un potentiel V et connectée à une inductance L (Fig. 11). À l'instant $t = 0$, l'interrupteur S est fermé. Déterminez le courant dans le circuit en fonction du temps. Comment votre réponse change-t-elle si une résistance est incluse en série avec C et L ?

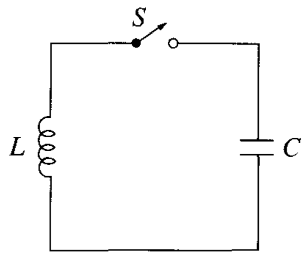

FIG. 11: © D. J. Griffiths

Exercice 5.21

Déterminez l'énergie stockée dans une section de longueur l d'un solénoïde (rayon R, courant I, n spires par unité de longueur),

(a) en partant de l'équation $W = \frac{1}{2}LI^2$;

(b) en partant de l'équation $W = \frac{1}{2}\oint \mathrm{d}l\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$;

(c) en partant de l'équation $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\tau\, B^2$;

(d) en partant de l'équation $W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, B^2 - \oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\right]$ (on prendra comme volume $\mathcal{V}$ un tube cylindrique de longueur l, de rayon interne $a < R$ et de rayon externe $b > R$).

Exercice 5.22

Un long câble cylindrique de rayon R est parcouru dans une direction par un courant uniformément réparti sur sa section. Le courant retourne sur la surface du câble (il existe une fine couche isolante séparant les courants dans un sens et dans l'autre.) Déterminez l'inductance propre par unité de longueur de ce système.

Exercice 5.23

Supposons que le circuit de la Fig. 12 ait été connecté pour un temps très long à la batterie de force électromotrice $\mathcal{E}_0$, et que soudainement, à $t = 0$, l'interrupteur S soit abaissé.

(a) Quel est le courant pour $t > 0$?

(b) Quelle est l'énergie totale délivrée à la résistance ?

(c) Montrez que celle-ci est égale à l'énergie initialement stockée dans l'inductance.

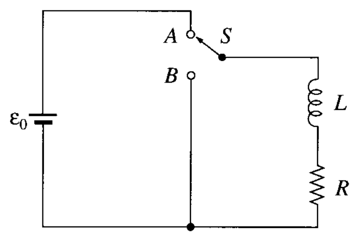

FIG. 12: © D. J. Griffiths

Exercice 5.24

Deux petites boucles de courant, d'aires $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$, sont séparées d'un vecteur $\mathbf{r}$ (Fig. 13). Déterminez leur inductance mutuelle. [*Indication :* traitez les boucles comme des dipôles magnétiques.] Votre résultat est-t-il en accord avec le fait que $M_{12} = M_{21}$?

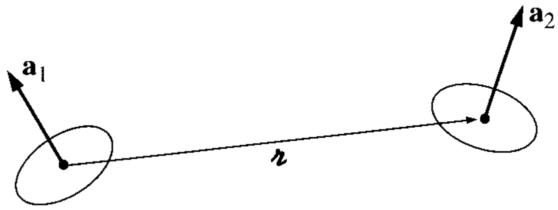

FIG. 13: © D. J. Griffiths

Exercice 5.25

Un large fil de rayon a est parcouru par un courant I, uniformément réparti dans sa section. Le fil comporte une coupure de largeur $w \ll a$ qui forme un condensateur plan (Fig. 14). Déterminez le champ magnétique dans la coupure, à une distance $r < a$ de l'axe du fil.

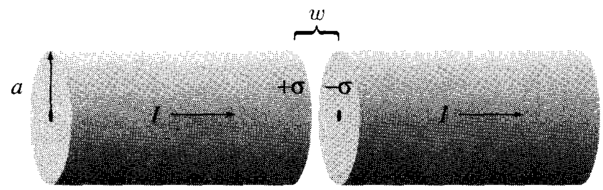

FIG. 14: © D. J. Griffiths

Exercice 5.26

On se réfère à l'Exercice 5.13, dont la réponse correcte s'écrit

$$\mathbf{E}(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\dfrac{a}{r}\right) \hat{\mathbf{z}}, & , r < a, \\ 0, & , r > a. \end{cases}$$

(a) Calculez la densité de courant de déplacement $\mathbf{J}_\mathrm{d}$.

(b) Intégrez ce résultat afin d'obtenir le courant de déplacement, $I_\mathrm{d} = \int \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{d}$.

(c) Comparez I_d et I (calculez leur rapport.) Supposons que le cylindre extérieur ait 2 mm de diamètre. Quelle devrait être la fréquence pour que $I_\mathrm{d}/I = 1\,\%$? Faraday était-il un mauvais expérimentateur pour ne pas avoir mesuré les courants de déplacement ?