TD 6
Ondes électromagnétiques

Exercice 6.1

Montrez que les fonctions

$$f_1(z,t) = A\mathrm{e}^{-b(z-vt)^2}, \qquad f_2(z,t) = A\sin\left(b[z-vt]\right), \qquad f_3(z,t) = \frac{A}{b(z-vt)^2+1},$$

(que l'on esquissera rapidement) sont solutions de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Montrez que les fonctions

$$f_4(z,t) = A\mathrm{e}^{-b(bz^2+vt)}, \qquad f_5(z,t) = A\sin(bz)\cos\left([bvt]^3\right)$$

ne le sont *pas*.

Exercice 6.2

Montrez que l'onde stationnaire $f(z,t) = A\sin(kz)\cos(kvt)$ est solution de l'équation d'onde (1), et explicitez-la comme la somme d'une onde se déplacant vers la gauche et d'une onde se déplacant vers la droite.

Exercice 6.3

Montrez que la superposition linéaire de deux ondes transverses de même amplitude déphasées de $\pi/2$ et dont les polarisations sont perpendiculaires résulte en une onde *circulairement polarisée*.

Exercice 6.4

Écrire les expressions du champ électrique et magnétique associées à une onde plane monochromatique d'amplitude E_0, de fréquence ω, de phase nulle, se propageant vers les x négatifs et polarisée selon z.

Exercice 6.5

Calculez les coefficients de réflexion et de transmission *exactes*, sans supposer comme dans le cours (cf. § 6.3.2) que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Vérifiez que $R + T = 1$.

Exercice 6.6

Dans le § 6.3.2 du cours, nous avons tacitement supposé que les ondes réfléchie et transmise ont la même polarisation (selon x). Montrez que ceci *doit* être le cas.

Exercice 6.7

(a) Supposons que vous « enfermiez » des charges libres dans du verre (indice de réfraction $n = 1.5$, résistivité $\rho = 10^{12}\,\Omega\text{m}$). Au bout de combien de temps ces charges se retrouveraient-elles à la surface du verre ?

(b) L'argent est un excellent conducteur (résistivité $\rho = 1.59 \times 10^{-8}\,\Omega\text{m}$, permittivité $\epsilon \simeq \epsilon_0$, perméabilité $\mu \simeq \mu_0$), mais cher ! Supposons que vous montiez une expérience micro-onde devant fonctionner à $10^{10}\,\text{Hz}$. Quelle doit être l'épaisseur de la couche d'argent du compartiment contenant votre expérience ?

(c) Déterminez la longueur d'onde et la vitesse de propagation d'une onde radio de $1\,\text{MHz}$ dans du cuivre ($\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\text{m}$, même permittivité et perméabilité que le vide, environ).

Exercice 6.8

(a) Montrez que la longueur de peau dans un mauvais conducteur ($\sigma \ll \omega\epsilon$) s'écrit $d = (2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (indépendante de la fréquence.) Calculez la longueur de peau de l'eau pure ($\epsilon = 80\epsilon_0$, $\mu \simeq \mu_0$, $\rho = 2.5 \times 10^5\,\Omega\text{m}$).

(b) Montrez que la longueur de peau d'un bon conducteur ($\sigma \gg \omega\epsilon$) s'écrit $d = \lambda/2\pi$, où λ est la longueur d'onde dans le conducteur. Calculez la longueur de peau pour un métal typique de conductivité $\sigma = 10^7\,\text{S/m}$ dans le visible ($\omega = 10^{15}\,\text{Hz}$). On supposera que $\epsilon \simeq \epsilon_0$ et $\mu \simeq \mu_0$. Pourquoi un métal est-il opaque ?

(c) Montrez que dans un bon conducteur, le champ magnétique et le champ électrique sont déphasés de $\pi/4$, et calculez le rapport de leurs amplitudes. Application numérique : métal typique de la question (b). Comparez au cas du vide.

Exercice 6.9

(a) Calculez la densité d'énergie (moyennée sur le temps) d'une onde électromagnétique plane dans un milieu conducteur. Montrez que la contribution magnétique domine toujours.

(b) Montrez que l'intensité de cette onde est $I = (k/2\mu\omega)\mathcal{E}_0^2 \mathrm{e}^{-2\kappa z}$.

Exercice 6.10

Calculez le coefficient de réflexion de la lumière à l'interface air/argent ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\sigma = 6 \times 10^7\,\text{S/m}$) aux fréquences optiques ($\omega = 4 \times 10^{15}\,\text{Hz}$).

Exercice 6.11

Déterminez la largeur en fréquence de la région de dispersion « anormale » pour le cas d'une seule résonance de fréquence ω_0. Supposez que $\gamma \ll \omega_0$. Montrez que l'indice de réfraction présente des valeurs maximale et minimale à des fréquences où le coefficient d'absorption $\alpha = \alpha_{\text{max}}/2$.

Exercice 6.12

Pour le modèle de l'électron élastiquement lié, déterminez la vitesse de groupe v_g de l'onde se propageant dans un tel milieu. On négligera l'amortissement ($\gamma_j = 0$). Montrez que $v_g < c$, même si la vitesse de phase $v > c$.

Exercice 6.13

Montrez que les équations générales pour les potentiels V et $\mathbf{A}$ peuvent s'écrire de façon plus symétrique et compacte de la sorte :

$$\Box^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{2}$$

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla L = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{3}$$

avec

$$\Box^2 = \nabla^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

et

$$L = \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{4}$$

Exercice 6.14

Supposons que $V = 0$ et $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$, avec A_0, k et ω des constantes. Déterminez $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, et vérifiez que les champs satisfont aux équations de Maxwell dans le vide. Quelle condition devez-vous imposer sur ω et k ?

Exercice 6.15

Dans quelle jauge les potentiels de l'Exercice 6.14 sont-ils (Coulomb, Lorentz, ...) ?

Exercice 6.16

Vérifiez que dans la jauge de Lorentz [$L = 0$ dans l'Eq. (4)], les potentiels retardés

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \, \frac{\rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

sont solutions des Eqs. (2) et (3).