Examen

Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.
Durée de l'épreuve : 2h
Le sujet contient 4 pages au total

Exercice 1

Soit un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ d'un système à un degré de liberté, que l'on décrit grâce à la coordonnée généralisée q. Montrez que $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ est défini

(i) à une constante additive C près ;
(ii) à une constante multiplicative α près ;
(iii) à une dérivée totale par rapport au temps t d'une fonction scalaire $f(q, t)$ ne dépendant que de q et t (et pas de $\dot{q}$).

Exercice 2

On considère le système de la Fig. 1 : une particule ponctuelle de masse m, dans le champ de gravitation (selon $-\hat{z}$, accélération de la pesanteur : g), est contrainte de se déplacer à l'intérieur d'un cône de révolution de demi-angle α. Dans tout l'exercice, on néglige la friction entre la particule ponctuelle et le cône.

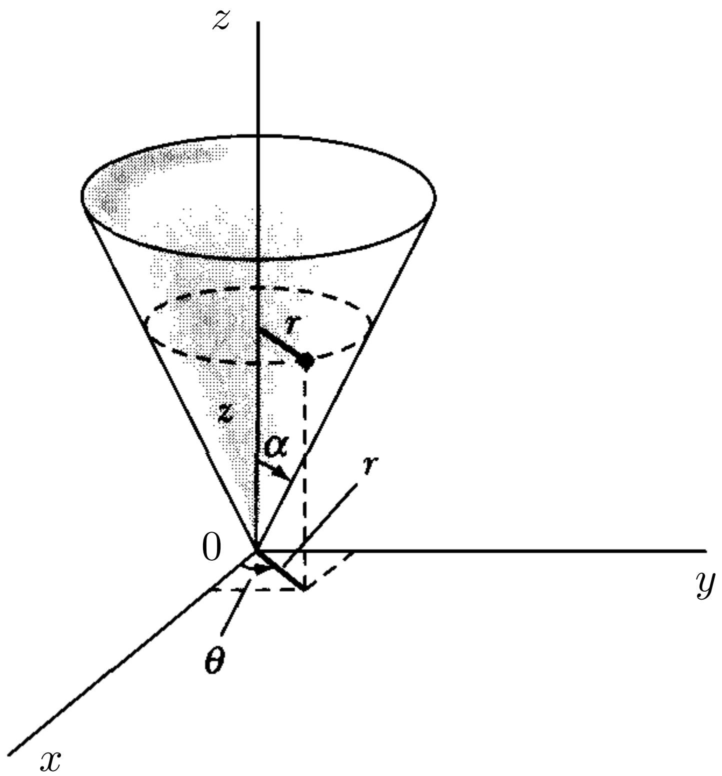

Figure 1

(a) On décrit le mouvement de la particule à l'aide de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir Fig. 1). Exprimez la contrainte qui relie z à r.

(b) En déduire une expression du lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction des coordonnées généralisées r et θ.[1]

1. On rappelle l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques : $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{z}$.

(c) Déterminez les deux équations du mouvement. L'une-d'elle exprime une loi de conservation. Laquelle ? Montrez que la quantité conservée correspond au moment cinétique L selon z. À l'aide de la loi de conservation, démontrez que l'équation du mouvement pour la seule variable r est donnée par

$$\ddot{r} - \frac{L^2 \sin^2 \alpha}{m^2 r^3} + g \sin \alpha \cos \alpha = 0. \tag{1}$$

(d) À l'aide de l'Eq. (1), montrez qu'un mouvement circulaire tel que $r = r_0 =$ constante est stable.

Exercice 3

On considère la machine d'Atwood de la Fig. 2, constituée de trois masses ponctuelles m, $2m$ et $3m$ reliées via des poulies par un câble non-élastique. On néglige dans la suite la masse des poulies, ainsi que celle du câble. Soient x et y les hauteurs respectivement des masses de gauche (m) et de droite ($3m$) par rapport à la situation où les trois masses sont à la même altitude.

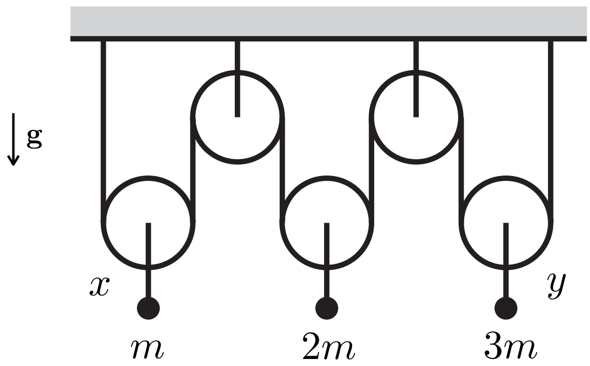

FIGURE 2

(a) Exprimez la contrainte sur l'altitude z de la masse du milieu ($2m$) en fonction de x et y.

(b) Déterminez le lagrangien du système en fonction des deux coordonnées généralisées x et y.

(c) Par quelle transformation infinitésimale le lagrangien de la question précédente est-il invariant ?

(d) En déduire le moment conservé $P(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ du système.

Exercice 4

On rappelle que la propagation des rayons lumineux obéit aux deux règles suivantes :

- Soit un rayon passant par deux points A et B. Parmi tous les rayons possibles passant par A et B, le rayon effectivement suivi est celui qui minimise le temps de parcours des photons entre A et B (*Principe de Fermat*).
- La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu transparent d'indice de réfraction n est c/n, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

On considère dans la suite un repère orthonormée $(Oxyz)$ où l'altitude $z = 0$ est au niveau du sol. Soient deux points $A(-\ell/2, 0, h)$ et $B(+\ell/2, 0, h)$, tous deux situés à la même altitude $h > 0$ au-dessus du sol et séparés d'une distance ℓ. On admet qu'un rayon lumineux passant par A et B se décrit par une fonction $z = z(x)$ pour $-\ell/2 \leqslant x \leqslant +\ell/2$. On suppose que l'air est un milieu d'indice $n(z) = 1 + \alpha z$, où α est une constante positive (cette formule ne s'appliquant que pour des valeurs limitées de z). Ceci est dû à une stratification en température (et donc en densité) de l'air au voisinage du sol.

(a) Justifiez que le rayon lumineux passant effectivement par A et B minimise l'« action »

$$T[z(x)] = \frac{1}{c}\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \mathrm{d}x\sqrt{1+z'^2}\,(1+\alpha z)\,, \tag{2}$$

où $z' = \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$.

(b) Quel est le « lagrangien » $\mathcal{L}$ de ce système ? Calculez la fonction « énergie » E associée à ce lagrangien. [2] Est-elle conservée et pourquoi ?

(c) Déduire de la question précédente que les rayons lumineux qui extêmisent le temps T donné à l'Eq. (2) sont de la forme [3]

$$z(x) = \frac{1}{\beta}\cosh\left(\beta[x-x_0]\right) - \frac{1}{\alpha},$$

où β et x_0 sont des constantes.

(d) Montrez que $x_0 = 0$. Trouvez une relation entre β et h.

(e) (*Question bonus*)

  (i) Tracez l'allure de la fonction $\cosh(x/2)/x$ pour $x > 0$.

  (ii) Le point remarquable de cette courbe a pour coordonnées $(2.4, 0.754)$. En déduire que pour α et h fixés tel que $h + 1/\alpha > 0$, il y a une valeur maximale de la distance ℓ au-delà de laquelle il n'existe pas de rayon passant par A et B.

  (iii) Tracez l'allure d'un rayon passant par A et B. En quoi ce résultat peut-il expliquer le phénomène de *mirage chaud* que l'on peut parfois observer dans le désert ?

Exercice 5

On considère un oscillateur harmonique de masse m dont la fréquence

$$\omega(t) = \omega_0\left[1 + \eta\sin(\Omega t)\right]$$

est modulée périodiquement en temps à une fréquence Ω, avec ω_0 la fréquence propre de l'oscillateur en l'absence de modulation, et où le paramètre sans dimension η mesure l'intensité de la modulation. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $\eta \ll 1$. Le lagrangien du système dépend donc du temps t, et s'écrit

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2(t)q^2, \tag{3}$$

avec q la coordonnée généralisée décrivant le mouvement de l'oscillateur.

(a) Déterminez le moment p conjugué à q. Montrez que le hamiltonien du système s'écrit

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2(t)q^2. \tag{4}$$

(b) On introduit les nouvelles variables

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\sqrt{m\omega_0}\,q + \frac{\mathrm{i}\,p}{\sqrt{m\omega_0}}\right),$$
$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\sqrt{m\omega_0}\,q - \frac{\mathrm{i}\,p}{\sqrt{m\omega_0}}\right).$$

Montrez que $\bar{z}$ et z sont des variables conjuguées.

(c) Exprimez le hamiltonien (4) en fonction de z et $\bar{z}$ au premier ordre en $\eta \ll 1$.

2. On rappelle que l'on définit dans le cas général $E = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}$.

3. Indication : On utilisera un changement de variables adaptées et le fait que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

(d) En déduire que les équations du mouvement sont données par

$$\dot{z} = -\mathrm{i}\,\omega_0\,[1+\eta\sin(\Omega t)]\,z - \mathrm{i}\,\omega_0\eta\sin(\Omega t)\,\bar{z}, \tag{5a}$$
$$\dot{\bar{z}} = +\mathrm{i}\,\omega_0\,[1+\eta\sin(\Omega t)]\,\bar{z} + \mathrm{i}\,\omega_0\eta\sin(\Omega t)\,z. \tag{5b}$$

(e) (*Question bonus*) On introduit les nouvelles variables $Z(t)$ et $\bar{Z}(t)$ via la transformation

$$z(t) = \exp\left(-\mathrm{i}\,\omega_0\int_0^t \mathrm{d}s\,[1+\eta\sin(\Omega s)]\right)Z(t),$$
$$\bar{z}(t) = \exp\left(+\mathrm{i}\,\omega_0\int_0^t \mathrm{d}s\,[1+\eta\sin(\Omega s)]\right)\bar{Z}(t).$$

(i) Montrez que les Eqs. (5) se transforment, au premier ordre en η, en

$$\dot{Z} = -\mathrm{i}\,\eta\omega_0\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\omega_0 t}\bar{Z}, \tag{6a}$$
$$\dot{\bar{Z}} = +\mathrm{i}\,\eta\omega_0\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0 t}Z, \tag{6b}$$

(ii) Dans le cas où $\Omega \simeq 2\omega_0$, on peut retenir dans les équations ci-dessus seulement les termes « résonants » $\propto \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\Omega-2\omega_0)t}$. Montrez que dans cette limite, les Eqs. (6) se découplent et que

$$\ddot{Z} + \mathrm{i}\,(\Omega - 2\omega_0)\,\dot{Z} - \left(\frac{\eta\omega_0}{2}\right)^2 Z = 0 \tag{7}$$

(iii) Quelle est la forme de la solution générale de l'Eq. (7) ? En particulier, que se passe-t'il pour le mouvement de l'oscillateur lorsque $|\Omega - 2\omega| < \eta\omega_0$? À quelle condition le phénomène d'*amplification paramétrique* a-t'il lieu ?