

Travaux dirigés de mécanique hamiltonienne

1 Retour sur la notion d'énergie

On considère le lagrangien à une dimension

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \quad (1)$$

où x est une coordonnée cartésienne, et $V(x)$ un potentiel quelconque.

- (a) Soit une autre coordonnée généralisée $q = q(x, t)$ dépendante de x et du temps t . De façon équivalente, cela signifie que x dépend de q et de t , c'est-à-dire $x = x(q, t)$. Montrez alors que le lagrangien (1), exprimé en fonction des variables $(q, \dot{q}, t)$, entraîne que la quantité

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}$$

s'exprime comme

$$\mathcal{E} = T + V - m \left[\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial t} \dot{q} + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right]$$

et ne correspond donc pas à l'énergie $T + V$.

- (b) On considère maintenant la quantité

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L}.$$

Vérifiez que $E = T + V$. Montrez que le fait que E soit une quantité conservée est compatible avec l'équation d'Euler-Lagrange.

2 Équations de Hamilton

Exercice 1

- (a) On considère une fonction $f(q, p, t)$ de la coordonnée généralisée q , du moment conjugué p et du temps t . À l'aide des équations de Hamilton, montrez que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

où $H(q, p)$ est le hamiltonien du système, et où l'on a défini les *crochets de Poisson*¹

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial q} \frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{\partial f_2}{\partial q}.$$

En déduire que si f ne dépend pas explicitement du temps, la condition pour que f soit conservée s'écrit $\{f, H\} = 0$.

- (b) Soient f, g, h, f_1 , et f_2 des fonctions de (q, p, t) . Démontrez les propriétés suivantes des crochets de Poisson :

(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

(ii) $\{f, c\} = 0$, avec c une constante

1. Pour un système décrit par N coordonnées généralisées, on a $\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right)$.

- (iii) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
 - (iv) $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$
 - (v) $\partial_t \{f, g\} = \{\partial_t f, g\} + \{f, \partial_t g\}$
 - (vi) $\{f, q\} = -\partial_p f$
 - (vii) $\{f, p\} = \partial_q f$
 - (viii) $\{q, q\} = \{p, p\} = 0, \{q, p\} = 1$
 - (ix) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (*identité de Jacobi*)
- (c) Soient f et g deux fonctions de (q, p, t) . Démontrez le *théorème de Poisson*, qui stipule que si f et g sont conservées, alors $\{f, g\}$ l'est également. Dans un premier temps, on pourra supposer que f et g ne dépendent pas explicitement du temps. On démontrera ensuite le théorème dans le cas général.
- (d) Calculez les crochets de Poissons des trois composantes du moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Exercice 2

Montrez que pour un système à N degrés de liberté $(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$ caractérisé par le hamiltonien H , les $2N$ équations de Hamilton s'écrivent

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \text{avec } 1 \leq i \leq N.$$

Exercice 3

On considère la machine d'Atwood de la Fig. 1 constituée de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 reliées via une poulie par un fil non-élastique. On néglige dans la suite la masse de la poulie, ainsi que celle du fil. Soit x la position verticale de la masse de gauche, en orientant l'axe vers le haut.

- (a) Montrez que le hamiltonien s'écrit en terme de x et de son moment conjugué p comme

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + (m_1 - m_2)gx,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- (b) En déduire les équations de Hamilton. Vérifiez que celles-ci sont équivalentes à l'équation d'Euler-Lagrange.

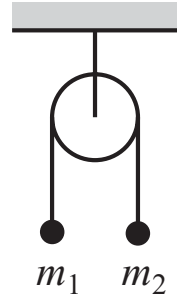


FIGURE 1

Exercice 4

On considère la machine d'Atwood de la Fig. 2. Soient x et y les positions verticales respectives de la masse du milieu et de celle de droite (on oriente l'axe vers le haut).

- (a) Montrez que le hamiltonien s'écrit en terme de x, y , et de leurs moments conjugués respectifs p_x et p_y , comme

$$H = \frac{1}{14m} (5p_x^2 - 2p_x p_y + 3p_y^2) + mgy.$$

- (b) En déduire les quatre équations de Hamilton. Vérifiez que celles-ci sont équivalentes aux équation d'Euler-Lagrange.

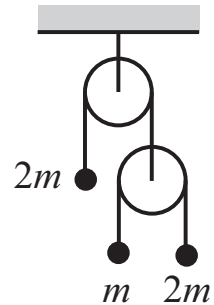


FIGURE 2

Exercice 5

Une masse ponctuelle m est connectée à un mur par un ressort horizontal (constante de raideur k , longueur au repos ℓ). Le mur, dont la position est donnée par $X(t) = X_0 \sin(\omega t)$, est tel qu'il a un mouvement sinusoïdal de gauche à droite. Dans la suite, on appellera z l'élongation du ressort par rapport à l'équilibre et p le moment conjugué à z .

- (a) Montrez que le hamiltonien du système est

$$H = \frac{p^2}{2m} - X_0 \omega \cos(\omega t) p + \frac{1}{2} k z^2.$$

- (b) Écrire les équations de Hamilton. En déduire l'équation du mouvement.
 (c) Dans ce problème, est-ce que H correspond à l'énergie du système? Est-ce que H est conservé?

Exercice 6

Une perle de masse m est libre de glisser sans frottement sur un cerceau de rayon R dans le champ gravitationnel (accélération de la pesanteur g). Le cerceau est en rotation autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω constante, comme le montre la Fig. 3.

- (a) Montrez que le hamiltonien s'exprime en fonction de θ (voir figure) et de son moment conjugué p comme

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta.$$

- (b) Écrire les équations de Hamilton. En déduire l'équation du mouvement.
 (c) Dans ce problème, est-ce que H correspond à l'énergie du système? Est-ce que H est conservé?

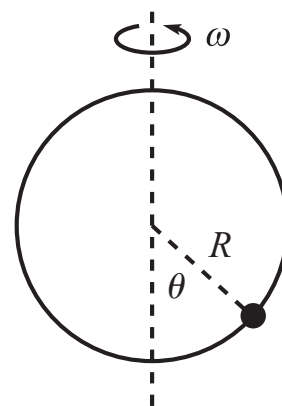


FIGURE 3

3 Transformations de Legendre

Déterminez la transformée de Legendre de la fonction $F(x) = x^n$. Vérifiez que $dG(s)/ds = x$.

4 Transformations canoniques

Exercice 1

On considère deux oscillateurs harmoniques couplés, dont le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_2^2 + \frac{1}{4} m \Omega^2 (x_1 - x_2)^2.$$

- (a) Montrez que la transformation

$$X = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad Q = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}$$

est canonique.

- (b) Exprimez le hamiltonien dans ces nouvelles variables.
 (c) Déterminez les fréquences propres du système couplé.
 (d) En déduire la forme générale du mouvement $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Exercice 2

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

où x et p sont des variables conjuguées.

- (a) On pose $x = X/\sqrt{m\omega}$ et $p = \sqrt{m\omega}P$. Exprimez le hamiltonien en fonction de X et P , et calculez le crochet de Poisson $\{X, P\}$.
- (b) On introduit les fonctions a et a^* (complexe conjuguée de a), définies par

$$a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}}, \quad a^* = \frac{X - iP}{\sqrt{2}}.$$

Exprimez le hamiltonien en fonction de a , a^* , et ω .

- (c) Calculez le crochet de Poisson $\{a, a^*\}$.
- (d) Écrivez l'équation d'évolution dans le temps de a et donnez sa solution générale. Exprimez l'énergie E de l'oscillateur à partir des paramètres de cette solution et de ω .
- (e) On suppose que l'énergie de l'oscillateur est nulle pour $t \leq 0$. Entre $t = 0$ et $t = T$, on applique à cet oscillateur une force dérivant de l'énergie potentielle $V(x, t) = \sqrt{2m\omega}bx \sin(\Omega t)$. Calculez l'énergie de l'oscillateur pour $t > T$. Discutez de la dépendance en Ω de votre résultat.