Examen — 2e session

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 2h
Le sujet comprend 2 pages au total

1 Gaz de fermions de Dirac sans masse

On considère un gaz bi-dimensionnel de fermions libres dont on néglige le degré de liberté de spin, confinés à une surface $S = L^2$ et à l'équilibre thermique à la température T. La relation de dispersion correspond à celle de fermions de Dirac sans masse,

$$E_{\mathbf{k}} = \hbar v|\mathbf{k}|,$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ est quantifié selon $k_i = 2\pi n_i/L$ avec n_i un entier relatif ($i = x, y$), où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, et où v est une constante dont la dimension est celle d'une vitesse. On se place dans la suite du problème à la limite thermodynamique. On notera $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ avec k_{B} la constante de Boltzmann.

1/ Montrer que la densité d'état s'écrit $\rho(E) = \alpha E^p$, où p est un entier que l'on déterminera et où α est une constante que l'on explicitera en fonction des données du problème.

2/ Donner l'expression de la distribution de Fermi-Dirac $f(E)$ en fonction du potentiel chimique μ et de la température T. Représenter $f(E)$ pour $T \neq 0$ et pour $T = 0$.

3/ Donner une relation intégrale entre le nombre de particule N et le potentiel chimique μ du système. (On ne cherchera pas à calculer l'intégrale de façon exacte !)

4/ À $T = 0$, en déduire l'expression de l'énergie de Fermi E_{F} en fonction de la densité de particule n. Donner l'expression du vecteur d'onde de Fermi k_{F} en fonction de n.

5/ Déterminer à $T = 0$ l'énergie moyenne e par unité de surface du système en fonction de n.

2 Solution exacte du modèle d'Ising en dimension une

On considère une chaîne linéaire de $N \gg 1$ spins d'Ising $s_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, N$) à la température T et sans champ magnétique extérieur. Dans la suite du problème, on prendra des conditions aux limites périodiques ($s_{N+1} = s_1$), et l'on ne considèrera que des interactions ferromagnétiques entre plus proches voisins. Le hamiltonien du système s'écrit alors

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \tag{1}$$

où $\langle i, j \rangle$ dénote une sommation sur i et j plus proches voisins.

2.1 Généralités

1/ Quel est le signe de J ? Quelle est sa dimension ? Quelle est son origine microscopique ?

2/ Montrer que le Hamiltonien (1) peut s'écrire à l'aide d'une seule somme sur i comme

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}$$

et justifier du fait que l'on puisse placer les spins sur un anneau.

2.2 Fonction de partition et énergie libre

1/ Quel est le nombre total de paires de proches voisins dans la chaîne ?

2/ Montrer que pour des spins d'Ising ($s_i = \pm 1$), on peut écrire

$$e^{Ks_is_j} = \cosh(K)\left[1 + \tanh(K)s_is_j\right],$$

où $K = \beta J$, avec $\beta = 1/k_B T$ et k_B la constante de Boltzmann.

3/ En déduire que la fonction de partition canonique se met sous la forme

$$Z = \cosh^N(K) \sum_{s_1=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \prod_{i=1}^{N} \left[1 + \tanh(K)s_is_{i+1}\right]. \tag{2}$$

4/ Il est possible de développer le produit apparaissant dans l'Eq. (2) ci-dessus comme une somme, 1 plus des termes du type $\tanh(K)s_is_{i+1}$, $\tanh^2(K)s_is_{i+1}s_ls_{l+1}$, etc. On peut alors représenter chaque terme de cette somme par un diagramme sur la chaîne de spins [on associe un trait entre les sites s_is_{i+1} pour chaque $s_is_{i+1}\tanh(K)$ du terme considéré].

a/ Pour une chaîne de 10 spins, représenter le diagramme correspondant au terme $\tanh^4(K)s_2s_3s_3s_4s_6s_7s_{10}s_1$.

b/ Démontrer que les diagrammes où un site i n'est associé qu'à un seul lien ne contribuent pas à la somme.

c/ Quels sont les deux diagrammes qui contribuent de façon non nulle à la fonction de partition du système ?

d/ En déduire l'expression exacte de la fonction de partition du modèle d'Ising à une dimension sans champ magnétique extérieur.

5/ Que devient l'expression de Z dans la limite thermodynamique ($N \to \infty$) ? Donner l'expression de l'énergie libre du système. Est-elle extensive ?

6/ En utilisant la même méthode diagrammatique, calculer l'aimantation moyenne $\langle s_i \rangle$ du site i. Existe-t'il une transition de phase ? Comparer à l'approximation de champ moyen et commenter.

2.3 Longueur de corrélation

On cherche à calculer la fonction de corrélation à deux spins

$$\Gamma(r) = \langle s_is_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle, \tag{3}$$

où r est la distance entre les deux sites i et j sur l'anneau ($r = \min\{|i-j|, N-|i-j|\}$).

1/ Montrer que l'on peut utiliser une méthode analogue à celle utilisée pour le calcul de la fonction de partition pour déterminer la fonction de corrélation (3). Quels sont les deux seuls diagrammes qui contribuent à $\langle s_is_j \rangle$?

2/ Evaluer les contributions de ces diagrammes et en déduire que

$$\Gamma(r) = \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right),$$

où l'on spécifiera l'expression de ξ.

3/ Donner l'allure de ξ en fonction de la température. Commenter.