TD
Équation de Langevin

1 Mouvement brownien

On considère une particule *brownienne* à 1d, repérée par sa position x, de masse m et soumise à une force de friction $-m\gamma v$ proportionnelle à sa vitesse v, ainsi qu'à une force aléatoire $\xi(t)$ représentée sur la Fig. 1. On fait sur $\xi(t)$ les hypothèses de la théorie de Langevin,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \tag{1a}$$

$$\left\langle \xi(t)\xi(t') \right\rangle = A\delta(t-t'), \tag{1b}$$

où A est une constante, et où $\langle \ldots \rangle$ représente une moyenne sur l'ensemble des réalisations de la force aléatoire $\xi(t)$.

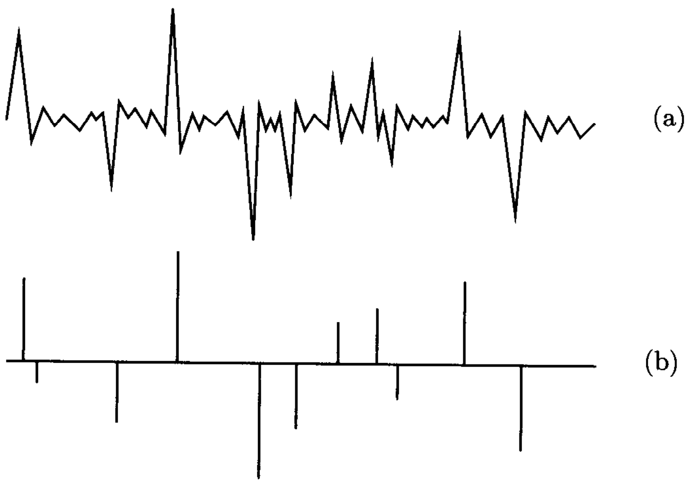

FIGURE 1 – (a) Représentation schématique de la force stochastique $\xi(t)$ en fonction du temps. (b) $\xi(t)$ approximée par une série de chocs aléatoires. © P. M. Chaikin, T. C. Lubensky.

(a) Discutez les hypothèses de l'Eq. (1). En particulier, quelle est la distribution de probabilité $\mathcal{P}[\xi(t)]$ de $\xi(t)$? Justifiez que l'on qualifie le terme source $\xi(t)$ de « bruit blanc ».

(b) Écrire l'équation du mouvement de la particule (*équation de Langevin*). Discutez l'origine physique de la force de friction. Déterminez la vitesse et la trajectoire de la particule, ainsi que sa vitesse et sa position moyenne, et discutez brièvement l'allure des solutions obtenues.

(c) On suppose que l'équilibre thermodynamique est atteint (précisez ce que cela suppose). Calculez la moyenne statistique de $\left\langle v^2 \right\rangle$ de deux façons différentes. En déduire la valeur de la constante A. Calculez la moyenne statistique $\left\langle x^2 \right\rangle$.

(d) Calculez la fonction de corrélation $\langle v(t)\xi(t') \rangle$.

(e) On définit les fonctions d'autocorrélation en position et en vitesse par $C_{xx}(t-t') = \langle x(t)x(t') \rangle$ et en vitesse $C_{vv}(t-t') = \langle v(t)v(t') \rangle$. Calculez ces deux quantités. Que vaut $\left\langle [x(t)-x(t')]^2 \right\rangle$?

2 Oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique uni-dimensionnel de masse m et de fréquence propre ω_0, soumis à une force de friction $-m\gamma\dot{x}$ (on supposera pour simplifier que $\omega_0 \gg \gamma$) et à une force aléatoire $\xi(t)$. On fait sur $\xi(t)$ les mêmes hypothèses que précédemment [cf. Eqs. (1)]. Reprendre les questions (b) et (c) de la première partie.

On rappelle que

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int^t \mathrm{d}s \left[\mathrm{e}^{\lambda_1(t-s)} - \mathrm{e}^{\lambda_2(t-s)}\right] f(s)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle à coefficient constant

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t),$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique $z^2 + az + b = 0$.