TD
Formalisme de la matrice densité

1 Généralités

On considère un système quantique dont l'état peut être décrit par un ensemble de vecteurs $|\psi_\lambda\rangle$ avec pour probabilité associée $\mathcal{P}_\lambda$. On rappelle que la matrice (ou opérateur) densité ρ est définie par

$$\rho = \sum_\lambda \mathcal{P}_\lambda \, |\psi_\lambda\rangle \, \langle\psi_\lambda| \, .$$

(a) Vérifiez que cet opérateur est hermitique, positif et de trace unité.

(b) Montrez que la valeur moyenne d'une observable A s'écrit $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho A)$.

2 Système à deux niveaux

On considère un système quantique à deux niveaux dont les deux états sont notés $|+\rangle$ et $|-\rangle$. On définit les deux états normés

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right),$$
$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right).$$

(a) Les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont-ils *purs* ?

(b) On appelle $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ les probabilités pour le système de se trouver respectivement dans les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. On considère les 2 situations suivantes :

   (i) $\mathcal{P}_a = 1$ et $\mathcal{P}_b = 0$ (ou $\mathcal{P}_a = 0$ et $\mathcal{P}_b = 1$) ;

   (ii) $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_b = 1 - \mathcal{P}$, avec $0 < \mathcal{P} < 1$.

   Exprimez la matrice densité ρ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ pour ces deux situations.

(c) Vérifier que la condition $\rho^2 = \rho$ est satisfaite pour le cas (i), mais pas pour le cas (ii).

(d) On définit les trois opérateurs τ_x, τ_y, et τ_z par leurs représentations dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculez la moyenne et la fluctuation (écart quadratique moyen) de ces trois opérateurs dans les deux ensembles définis précédemment.

3 Evolution temporelle de la matrice densité

On considère un système quantique dont l'évolution temporelle (unitaire) est régie par le hamiltonien $\mathcal{H}$.

(a) Déduire de l'équation de Schrödinger que

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \, .$$

(b) On se place dans la base des vecteurs propres de $\mathcal{H}$. On note $|\psi_i\rangle$ ces vecteurs et E_i les valeurs propres associées. Donnez l'évolution de l'opérateur densité.