Contrôle continu n° 1

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

On considère une tige homogène de longueur ℓ, de masse m dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{y}}$, et appuyée contre un mur dont on négligle la friction. Soit μ le coefficient de friction statique entre la tige et le sol, et soit θ l'angle que forme la tige avec le sol. La tige se trouve dans le plan $(0xy)$ (voir Fig. 1).

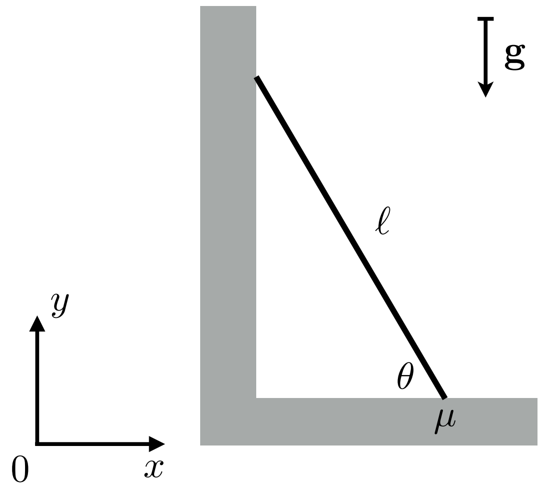

FIGURE 1

(a) Sur un schéma, représentez soigneusement toutes les forces qui s'exercent sur la tige.

(b) Déterminez en fonction de μ l'angle minimal $\theta_{\min}(\mu)$ que peut faire la tige avec le sol sans que celle-ci ne glisse.

(c) Déterminez les cas limites $\lim_{\mu\to 0}\theta_{\min}(\mu)$ et $\lim_{\mu\to\infty}\theta_{\min}(\mu)$.

(d) On considère à présent que la tige a une distribution de masse inhomogène, de telle sorte que son centre de masse se situe à un tiers de sa longueur en partant de la base de la tige. Quelle est alors la valeur de l'angle $\theta_{\min}$?

Exercice 2

On considère les coordonnées polaires (r, θ) représentées sur la Fig. 2.

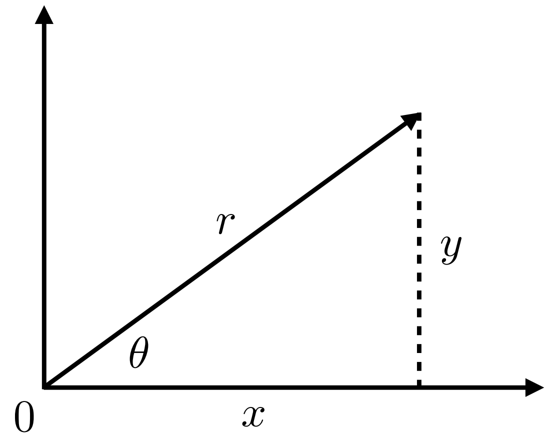

FIGURE 2

(a) Exprimez (x, y) en fonction de (r, θ), et inversement, (r, θ) en fonction de (x, y).

(b) Exprimez les vecteurs unitaires selon r et θ, que l'on notera respectivement $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, en fonction des vecteurs unitaires selon x et y (notés $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$).

(c) Déterminez l'expression de la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ en coordonnées polaires.

(d) En déduire que l'accélération a pour expression

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

(e) On considère une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible et sans masse de longueur ℓ. La masse est soumise à une force de pensanteur $m\mathbf{g}$ et les frottements sont négligés. On supposera que la masse forme initialement un angle θ_0 avec la verticale, et que sa vitesse initiale est nulle.

   (i) Faites un schéma du dispositif en indiquant le système de coordonnées utilisé ainsi que les forces qui s'exercent sur la masse.

   (ii) Déterminez l'équation du mouvement ainsi que la tension dans le fil.

   (iii) Dans la limite des petites oscillations, résoudre l'équation du mouvement et en déduire la fréquence (angulaire) d'oscillation du pendule.

Exercice 3

Soit une particule ponctuelle de masse m dans un espace à une dimension, soumise à une force $F = F(x)$ qui ne dépend que de la position x de la particule.

(a) À l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique, montrez que l'énergie E de la particule, que l'on définira soigneusement, est conservée.

(b) La particule est confinée au demi-espace $x > 0$ et est soumise à une force $F(x) = 2V_0\ell^2/x^3$, avec $V_0 > 0$ et $\ell > 0$. Quelle est l'énergie potentielle $V(x)$ associée [on posera $V(+\infty) = 0$] ?

(c) Les conditions initiales étant $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, déterminez la trajectoire de la particule à l'aide de la conservation de l'énergie.