Contrôle continu n° 1

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h
Le sujet comprend 2 pages au total

Questions de cours

(a) Quelle est la définition d'une force conservative ?

(b) Rappelez (sans démonstration) quelles sont les deux conditions afin qu'une force $\mathbf{F}$ en dimension 3 soit conservative.

Questions à choix multiples

Pour les questions ci-dessous, aucune démonstration n'est demandée.

(a) Si un objet a une vitesse négative et une accélération négative, accélère-t'il, ou freine-t'il ?

1) Il accélère. 2) Il freine.

(b) Deux personnes tirent, chacun avec une force F, sur les deux extrémités d'une corde (supposée inextensible et sans masse). Quelle est la tension dans la corde ?

1) $F/2$ 2) F 3) $2F$

Exercice 1

On considère une tige homogène de longueur ℓ, de masse m dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{y}}$, et appuyée contre un mur dont on néglige la friction. Soit μ le coefficient de friction statique entre la tige et le sol, et soit θ l'angle que forme la tige avec le sol. La tige se trouve dans le plan $(0xy)$ (voir Fig. 1).

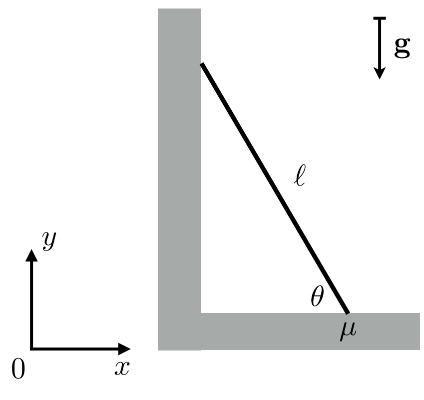

Figure 1

(a) Sur un schéma, représentez soigneusement toutes les forces qui s'exercent sur la tige.

(b) Déterminez en fonction de μ l'angle minimal $\theta_{\min}(\mu)$ que peut faire la tige avec le sol sans que celle-ci ne glisse.

(c) Déterminez les cas limites $\lim_{\mu\to 0}\theta_{\min}(\mu)$ et $\lim_{\mu\to\infty}\theta_{\min}(\mu)$.

(d) On considère à présent que la tige a une distribution de masse inhomogène, de telle sorte que son centre de masse se situe à un quart de sa longueur en partant de la base de la tige. Quelle est alors la valeur de l'angle $\theta_{\min}$?

Exercice 2

Un cylindre de rayon R, de densité de masse uniforme et de masse totale M se situe sur un plan incliné qui fait un angle θ avec l'horizontale. Une corde inextensible, et dont on négligera la masse, est attachée au point le plus à droite du cylindre, et une masse ponctuelle m est suspendue à cette corde (voir Fig. 2). On suppose que le coefficient de friction entre le plan incliné et le cylindre est suffisamment grand de telle sorte que le cylindre ne glisse pas sur le plan. Déterminez m en fonction de M et θ si le système est statique. Analysez les cas limites $\theta \to 0$ et $\theta \to \pi/2$.

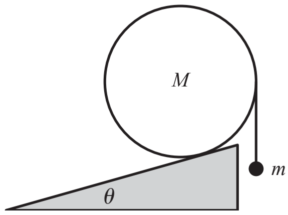

FIGURE 2

Exercice 3

On considère une particule ponctuelle de masse m dans le champ de pesanteur terrestre que l'on lâche d'une certaine hauteur avec une vitesse initiale nulle. Soit x l'axe vertical *orienté vers le bas*. On suppose que le mouvement est uni-dimensionnel. À l'instant initial $t_0 = 0$, on a donc pour vitesse initiale $v(0) = 0$ et l'on prendra, par commodité, $x(0) = 0$. La particule est soumise à la résistance de l'air, et l'on suppose que la force de frottement résultante est proportionnelle à la vitesse de la particule au carré. L'équation du mouvement de la particule est donc

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kmv^2, \tag{1}$$

où k est une constante positive.

(a) Quelle est la dimension de la constante k ?

(b) À l'aide de l'Eq. (1), arguez du fait que, au temps très long, la particule atteint une vitesse limite maximale $v_{\mathrm{m}} = \sqrt{g/k}$.

(c) En intégrant l'équation du mouvement (1), montrez que [1]

$$v(t) = v_{\mathrm{m}} \tanh\left(\frac{gt}{v_{\mathrm{m}}}\right). \tag{2}$$

(d) Discutez des cas limites $gt/v_{\mathrm{m}} \ll 1$ et $gt/v_{\mathrm{m}} \gg 1$ de l'Eq. (2), et esquissez v en fonction de t.

(e) Déterminez la trajectoire $x(t)$.

(f) Discutez des cas limites $gt/v_{\mathrm{m}} \ll 1$ et $gt/v_{\mathrm{m}} \gg 1$ de $x(t)$, et esquissez x en fonction de t.

1. Indication :

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right).$$