Contrôle continu n° 2

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h 30
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

Un bloc de masse m est au repos sur une table horizontale. Soit μ le coefficient de friction statique entre le bloc et la table. Un expérimentateur pousse le bloc grâce à un ressort (de constante de raideur k) qui fait un angle $\theta \in [0, \pi/2]$ avec l'horizontale, comme le montre la Fig. 1. Dans la suite, on supposera que $\tan\theta < 1/\mu$. On appelle x la longueur sur laquelle on compresse le ressort par rapport à sa longueur à l'équilibre. La force exercée par l'expérimentateur sur le bloc est donc égale en norme à $F_{\text{exp}} = kx$ et est dirigée selon le ressort.

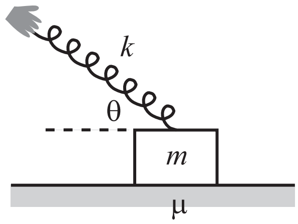

FIGURE 1

(a) Représentez sur un schéma toutes les forces qui s'exercent sur le bloc.

(b) Déterminez la distance maximale de compression $x_{\max}$ du ressort sans que le bloc ne bouge en fonction de l'angle θ.

(c) Analysez et commentez en particulier le cas limite $\theta = 0$.

Exercice 2

On considère la machine d'Atwood représentée à la Fig. 2. On néglige les masses des deux poulies ainsi que celles des deux cordes (qui sont supposées inextensibles). On suppose que les cordes ne glissent pas sur les poulies. Soient a_1, a_2 et A les accélérations (comptées positives vers le haut) respectives des masses ponctuelles m_1, m_2 et M. Soit T_1 la tension dans la corde du haut, et T_2 la tension dans la corde du bas. Les masses sont initialement au repos, et relachées à un instant ultérieur.

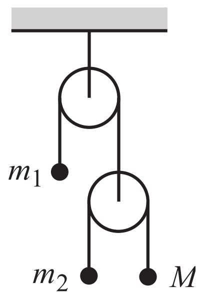

FIGURE 2

(a) Exprimez a_1 en fonction de a_2 et A. Justifiez soigneusement votre réponse.

(b) Exprimez la tension T_2 en fonction de T_1. Justifiez soigneusement votre réponse.

(c) Quelle doit être la valeur de M (en terme de m_1 et m_2) de telle sorte que la masse m_1 ne bouge pas ? Quel doit être la relation entre m_1 et m_2 afin qu'une telle valeur de M existe ?

(d) Quelle est alors la valeur de l'accélération A en fonction de m_1 et m_2 ? À quelle condition la masse M monte-t-elle ou descend-elle ?

Exercice 3

On considère la collision élastique représentée à la Fig. 3 : une particule (supposée ponctuelle) de masse m se meut avec une vitesse v_0 en direction d'une particule (elle aussi supposée ponctuelle) de masse $2m$ et initialement au repos. Le système formé par les deux masses est isolé de toute force extérieure.

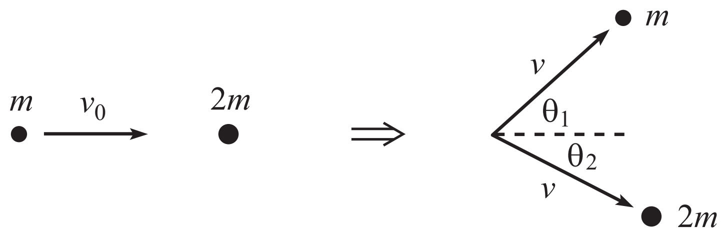

FIGURE 3

En supposant que les vitesses des deux particules après le choc soient égales en norme (et de magnitude v), déterminez v en fonction de v_0, ainsi que les deux angles de déflection θ_1 et θ_2.

Indication : La meilleure façon de déterminer θ_1 et θ_2 est de mettre au carré certaines équations du problème (sous une forme appropriée) et d'utiliser le fait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exercice 4

(a) Soit un cylindre creux (de petit rayon r_1 et de grand rayon r_2), de densité uniforme de masse ρ, de hauteur h et de masse m (voir Fig. 4). Montrez que le moment d'inertie par rapport à l'axe z est donné par

$$I = \beta m \left(r_1^2 + r_2^2\right),$$

où β est une constante sans dimension que l'on déterminera. On spécifiera sur un schéma le système de coordonnées utilisé dans le calcul.

(b) On dispose maintenant le cylindre de la Fig. 4 sur un plan incliné qui forme un angle θ avec l'axe horizontal x. On appelle y l'axe vertical. Le cylindre est disposé de telle sorte que son axe de rotation z soit perpendiculaire à x et y. Le cylindre est initialement au repos. On suppose que le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné. Soient a l'accélération linéaire du cylindre et α son accélération angulaire. Montrez que l'accélération du cylindre le long du plan incliné est donnée par

$$a = \frac{2g\sin\theta}{3 + r_1^2/r_2^2},$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

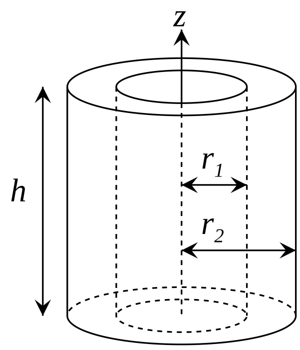

FIGURE 4

(c) On remplace à présent l'objet de la Fig. 4 par une sphère de rayon R, de densité volumique de masse *non uniforme*

$$\rho(r) = \rho_0\,\frac{\ell^2}{r^2},$$

avec ρ_0 et ℓ deux constantes positives (de dimensions respectives $[\rho_0] = ML^{-3}$ et $[\ell] = L$), et de masse totale m. Dans ce cas là, comment change vos réponses aux questions (a) et (b) ?