
Devoir à la maison Forces centrales et problème de Kepler

1 Forces centrales

Une force centrale est par définition une force qui pointe de façon radiale et dont l'amplitude ne dépend que de la distance r à la source,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}}.$$

De façon équivalente, une force centrale est telle que le potentiel associé prend la forme $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Donnez des exemples de forces centrales. On explicitera $F(r)$ et $V(r)$ dans chaque exemple.

2 Conservation du moment cinétique

Pour une particule ponctuelle, on définit le moment cinétique (ou moment angulaire) par

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

(Notez que puisque \mathbf{L} dépend de \mathbf{r} , le moment angulaire dépend du choix de l'origine des coordonnées!) Montrez que si une particule est soumise à un champ de force centrale, alors (a) son moment angulaire est conservé et (b) son mouvement est planaire.

3 Potentiel effectif

On considère une particule de masse m dans un potentiel central $V(r)$.

(a) Montrez qu'en coordonnées polaires les équations du mouvement s'écrivent

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \tag{1}$$

(b) Montrez que l'Eq. (1) correspond à la conservation du moment cinétique.

(c) En déduire que l'énergie du système s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \tag{2}$$

où le potentiel effectif est défini comme

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \tag{3}$$

(d) Montrez à l'aide de l'Eq. (2) et de l'expression de L que $r(\theta)$ obéit à l'équation

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}. \tag{4}$$

4 Les trois lois de Kepler

On considère désormais le système Soleil–Terre. Le potentiel gravitationnel s'écrit

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{avec } \alpha = GMm,$$

où $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ est la constante gravitationnelle, $M = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ la masse du Soleil, et $m = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ celle de la Terre. Ici, r est mesuré par rapport au centre du Soleil.

- (a) Argumentez brièvement du fait que l'on puisse considérer le Soleil comme étant fixe dans ce problème.
- (b) Esquissez le potentiel effectif (3) pour le problème de Kepler.
- (c) En posant $z = y - m\alpha/L^2$ avec $y = 1/r$, montrez que l'Eq. (4) est équivalente à

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + B^2, \quad \text{avec } B = \frac{m\alpha}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (5)$$

- (d) Résoudre l'Eq. (5) et en déduire que

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \epsilon \cos \theta), \quad (6)$$

où $\epsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/m\alpha^2}$ est l'excentricité de l'orbite. Quelles sont les extrema de $r(\theta)$?

- (e) Montrez qu'en coordonnées cartésiennes, l'Eq. (6) revient à

$$x^2 + y^2 = \ell^2 - 2\epsilon\ell x + \epsilon^2 x^2, \quad (7)$$

avec $\ell = L^2/m\alpha$.

- (f) Quel type de trajectoire décrit l'Eq. (7) lorsque (i) $\epsilon = 0$, (ii) $0 < \epsilon < 1$, (iii) $\epsilon = 1$, et (iv) $\epsilon > 1$?
- (g) Démontrez mathématiquement les trois lois de Kepler (1571–1630), que ce dernier avait déduit grâce à des observations astronomiques, bien avant que Newton (1642–1727) n'énonce ses lois.

1^{re} loi – Loi des orbites

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

2^e loi – Loi des aires

Le rayon-vecteur reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.

3^e loi – Loi des périodes

Le carré de la période de révolution d'une orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète.