

## Examen de rattrapage

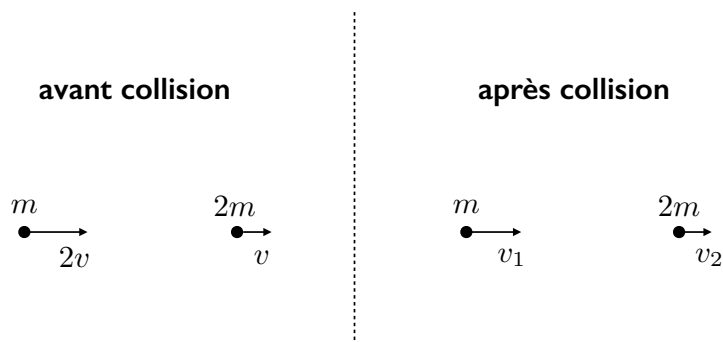
*Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés*

*Durée de l'épreuve : 1 h*

*Le sujet comprend 2 pages au total*

### Exercice 1

On considère le choc élastique unidimensionnel de deux particules non-relativistes de masse  $m$  et  $2m$ , considérées comme ponctuelles. Avant le choc des deux particules, la masse  $m$  de gauche en mouvement rectiligne uniforme vers la droite a une vitesse  $2v$ , alors que la masse  $2m$  de droite (en mouvement rectiligne uniforme également vers la droite) a une vitesse  $v$ . On appelle  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses des particules de gauche et droite après le choc, avec  $v_1$  et  $v_2$  comptées positives vers la droite (voir figure ci-dessous). Dans la suite, on néglige l'attraction gravitationnelle entre les deux masses et on suppose que la collision a lieu dans le vide.



Question : Calculez les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  des deux particules après le choc.

### Exercice 2

On considère le système de la Fig. 1 : un pendule, constitué d'une tige rigide de longueur  $l$  dont on néglige la masse, et d'une masse ponctuelle  $m$ , est accroché à un support de masse  $M$  libre de glisser sans frottement sur un rail horizontal.

- Écrire le lagrangien  $\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  du système en fonction des coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ .
- Déterminez les équations du mouvement.
- Résoudre les équations du mouvement pour des conditions initiales quelconques dans la limite des petits angles ( $\theta \ll 1$ ).

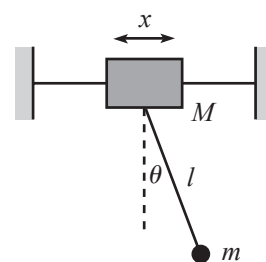


FIGURE 1

### Exercice 3

Un rectangle uniforme de masse  $m$ , de hauteur  $2a$  et de largeur  $2b$  se trouve au repos au sommet d'un cylindre fixe de rayon  $R$  (voir Fig. 2). On donne alors une pichenette infinitésimale au rectangle, afin que celui-ci « roule » sur le cylindre. La friction entre le rectangle et le cylindre est telle que le rectangle ne glisse pas sur le cylindre.

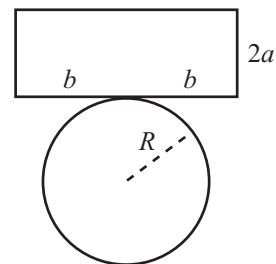


FIGURE 2

- Soit  $I$  le moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe de rotation perpendiculaire au rectangle et passant par son centre de masse. Calculez  $I$  et exprimez votre résultat en fonction de  $m$ ,  $a$ , et  $b$ .
- Déterminez la position du centre de masse du rectangle en fonction des paramètres du problème et de l'angle  $\theta$  que fait le point de contact cylindre-rectangle et la verticale par rapport au centre du cylindre.
- En déduire le lagrangien du système.
- Déterminez l'équation du mouvement du rectangle.
- À quelle condition le rectangle va-t-il effectuer des oscillations autour d'une position d'équilibre ? Déterminez dans ce cas la fréquence des petites oscillations autour du point d'équilibre. À quelle condition le rectangle va-t-il tomber du cylindre ?