TD 3
Mécanique du point

Forces centrales et problème de Kepler

1 Forces centrales

Une force centrale est par définition une force qui pointe de façon radiale et dont l'amplitude ne dépend que de la distance à la source,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}.$$

De façon équivalente, une force centrale est telle que le potentiel associé prend la forme $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Donnez des exemples de forces centrales. On explicitera $F(r)$ et $V(r)$ dans chaque exemple.

2 Conservation du moment angulaire

Pour une particule ponctuelle, on définit le moment angulaire (ou moment cinétique) par

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

(Notez que puisque $\mathbf{L}$ dépend de $\mathbf{r}$, le moment angulaire dépend du choix de l'origine des coordonnées !) Montrez que si une particule est soumise à un champ de force centrale, alors (a) son moment angulaire est conservé et (b) son mouvement est planaire.

3 Le potentiel effectif

On considère une particule de masse m dans un potentiel central $V(r)$.

(a) Montrez que, en coordonnées polaires, les équations du mouvement s'écrivent

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \tag{2}$$

Qu'exprime l'Eq. (2) ?

(b) En déduire que l'énergie du système s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}}(r), \tag{3}$$

où le potentiel effectif est défini comme

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \tag{4}$$

(c) Montrez à l'aide de l'Eq. (3) et de l'expression de L que $r(\theta)$ obéit à l'équation

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}. \tag{5}$$

4 Les trois lois de Kepler

On considère désormais le système Soleil-Terre. Le potentiel gravitationnel s'écrit

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \text{avec} \quad \alpha = GMm,$$

où $G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ est la constante gravitationnelle, $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg la masse du Soleil, et $m = 6.0 \times 10^{24}$ kg celle de la Terre. Ici, r est mesuré par rapport au centre du Soleil.

(a) Argumentez brièvement du fait que l'on puisse considérer le Soleil comme étant fixe dans ce problème.

(b) Esquissez le potentiel effectif (4) pour le problème de Kepler.

(c) En posant $z = y - m\alpha/L^2$ avec $y = 1/r$, montrez que l'Eq. (5) est équivalente à

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = -z^2 + B^2, \qquad \text{avec} \quad B = \frac{m\alpha}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \tag{6}$$

(d) Résoudre l'Eq. (6) et en déduire que

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \epsilon\cos\theta), \tag{7}$$

où $\epsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/m\alpha^2}$ est l'excentricité de l'orbite. Quelles sont les extrema de $r(\theta)$?

(e) Montrez qu'en coordonnées cartésiennes, l'Eq. (7) revient à

$$x^2 + y^2 = \ell^2 - 2\epsilon\ell x + \epsilon^2 x^2, \tag{8}$$

avec $\ell = L^2/m\alpha$.

(f) Quel type de trajectoire décrit l'Eq. (7) lorsque (i) $\epsilon = 0$, (ii) $0 < \epsilon < 1$, (iii) $\epsilon = 1$, et (iv) $\epsilon > 1$?

(g) Démontrez mathématiquement les trois lois de Kepler (1571–1630), que ce dernier avait déduit grâce à des observations astronomiques, bien avant que Newton (1642–1727) n'énonce ses lois.

1re loi – Loi des orbites
Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

2e loi – Loi des aires
Le rayon-vecteur reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.

3e loi – Loi des périodes
Le carré de la période de révolution d'une orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète.