Examen

Aucun document n'est autorisés.
Durée recommandée de l'épreuve : 1h
Le sujet contient 2 pages au total

1 Mécanique céleste

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle forment un système isolé. À l'instant t, elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés dans un référentiel galiléen d'origine O par $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OA_1}$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{OA_2}$ avec des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Dans la suite, on pose $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ et on notera $r = |\mathbf{r}|$ et $\hat{r} = \mathbf{r}/r$, et on désignera par G la constante de gravitation universelle.

1.1 Référentiel barycentrique

1/ Donner l'expression de la force $\mathbf{F}_{12}$ que m_1 exerce sur m_2 ainsi que de la force $\mathbf{F}_{21}$ que m_2 exerce sur m_1.

2/ Déterminer la position $\mathbf{R}$ du centre d'inertie (ou centre de masse) du système. À partir du principe fondamental de la dynamique, montrer que le centre d'inertie est en mouvement rectiligne uniforme à une vitesse $\mathbf{V}$ que l'on exprimera en fonction de m_1, m_2, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

3/ Déterminer les vitesses de m_1 et m_2 dans le référentiel du centre de masse (ou référentiel barycentrique) en fonction de m_1, m_2, et de $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

4/ Calculer l'énergie cinétique E_c des deux masses dans le référentiel baryentrique ; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\mathbf{v}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2.

5/ Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport m_1, caractérisé par $\mathbf{r}(t)$, est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera.

1.2 Système Terre–Soleil

On identifie désormais la masse m_1 à celle du Soleil (que l'on notera M) et m_2 à celle de la Terre (que l'on notera m), avec $M = 2 \times 10^{30}$ kg et $m = 6 \times 10^{24}$ kg.

1/ Arguer du fait que $\mu \simeq m$, de sorte que la trajectoire de la Terre autour du Soleil soit décrite par l'équation du mouvement $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(r)$, où le champ de force centrale est donné par

$$\mathbf{F}(r) = F(r)\hat{r} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}.$$

2/ Calculer l'énergie potentielle $V(r)$ associée au champ de force ci-dessus. Esquissez $V(r)$ en fonction de r.

3/ Soit $\mathbf{L}$ le moment cinétique de la Terre par rapport au Soleil. Démontrer que $\mathbf{L}$ est une quantité conservée lors du mouvement.

4/ Montrer que le mouvement de la Terre par rapport au Soleil se situe dans un plan.

5/ On se place à présent dans le plan du mouvement, et on décrit la trajectoire de la Terre autour du Soleil par les coordonnées polaires (r, θ). On rappelle qu'en coordonnées polaires,

$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$, où $\hat{\theta}$ est le vecteur unitaire selon l'angle θ tel que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$. Montrer que r et θ obéissent aux équations différentielles

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

Quelle est la signification physique de cette 2$^{\text{e}}$ équation.

6/ On suppose que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire (on notera R_{T} le rayon).

a/ Montrer que le mouvement de la Terre autour du Soleil est dans cette hypothèse uniforme.

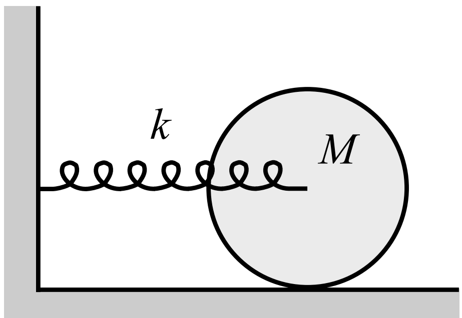
b/ Démontrer que le carré de la période de révolution $\mathcal{T}$ de la Terre est proportionnel au cube du rayon R_{T} de sa trajectoire.

2 Mécanique du solide

On considère un cylindre plein de rayon R, de hauteur L, de masse M et de densité volumique de masse uniforme ρ.

1/ Montrer que le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de révolution s'écrit $I = \beta M R^2$, où β est une constante que l'on déterminera. On détaillera soigneusement sur un schéma le système de coordonnées utilisé.

On considère maintenant qu'un ressort de constante de raideur k est attaché au centre de masse du cylindre (voir figure).



2/ On suppose que le cylindre roule sur le sol sans glisser. Quelle est la force à l'origine de ce phénomène ? On représentera cette force sur la figure ci-dessus en distinguant le cas où le cylindre accélère (i) vers la gauche et (ii) vers la droite.

3/ Donner la relation entre l'accélération linéaire a du cylindre et son accélération angulaire que l'on dénotera α.

4/ Rappeler sans justification l'équation reliant le couple τ exercé sur le cylindre à son moment d'inertie I et à son accélération angulaire α. En déduire une expression de la force de frottement en fonction de M et a.

5/ Montrer que l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre correspond à celle d'un oscillateur harmonique dont on précisera la fréquence. Comparer cette fréquence à celle d'un objet qui glisserait sans rouler, et expliquer qualitativement la différence.