

Examen

Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.

Durée de l'épreuve : 2h

Le sujet contient 3 pages au total

Exercice 1

Soit un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ d'un système à un degré de liberté, que l'on décrit grâce à la coordonnée généralisée q .

- (a) Rappelez la définition du moment conjugué p à q .
- (b) Rappelez la définition du Hamiltonien $H(q, p, t)$.
- (c) Démontrez les équations de Hamilton en calculant les dérivées partielles de $H(q, p, t)$ par rapport à q et p . Montrez également que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Exercice 2

On considère une particule libre *relativiste* de masse m à une dimension, dont le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}},$$

avec $\dot{x} = dx/dt$ la vitesse de la particule et où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

- (a) Calculez le moment p conjugué à x . Ce moment est-il conservé ?
- (b) À l'aide de l'équation d'Euler–Lagrange, déterminez l'équation du mouvement de la particule en fonction de $\ddot{x}$.
- (c) Déterminez le hamiltonien H de la particule.

Exercice 3

Galilée a oublié en haut de la tour de Pise le papier où il avait mis l'équation horaire du boulet de canon tiré verticalement. Il se rappelle juste que le boulet partant à $t = 0$ de $z = 0$ arrivant à $t = 1$ à $z = 1$ vérifie une loi du type

$$z(t) = at^2 + (1 - a)t. \tag{1}$$

- (a) En injectant la famille de solutions (1) dans l'action

$$S = \int_0^1 dt \left(\frac{1}{2} \dot{z}^2 - gz \right),$$

avec g l'accélération de la pesanteur, et en calculant S explicitement, aidez Galilée à retrouver la valeur de a .

- (b) La valeur optimale de a réalise-t'elle un minimum ou un maximum de l'action ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4

Soit un système à un degré de liberté, décrit par la coordonnée généralisée q et son moment conjugué p . On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= q^\alpha \cos(\beta p), \\ P &= q^\alpha \sin(\beta p). \end{aligned}$$

Pour quelle valeur de α et β la transformation ci-dessus est-elle canonique ?

Exercice 5

Une particule ponctuelle de masse m (non-relativiste) dans le champ de gravitation (accélération de la pesanteur g) est attachée à une tige indéformable et sans masse, de longueur R . Un tel système est appelé « pendule sphérique » car la masse ponctuelle se meut comme si elle glissait sans friction à la surface d'une sphère (voir Fig. 1). En coordonnées sphériques $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, le système est décrit par deux coordonnées généralisées, l'angle polaire θ et l'angle azimutale φ , puisque l'on a la contrainte holonome $r = R$.

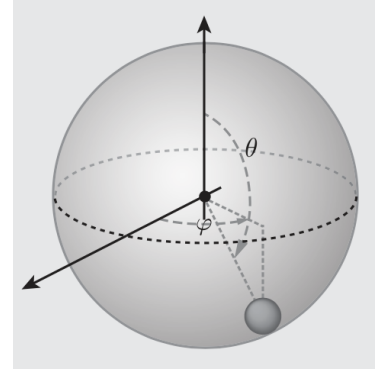


FIG. 1:

- (a) Déterminez le lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ du système. On pourra choisir le centre de la sphère comme zéro de potentiel. On rappelle qu'en coordonnées sphériques,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi}.$$

- (b) Laquelle des deux coordonnées θ ou φ est cyclique ? Pour quelle raison de symétrie ? En déduire un moment p conservé du système, et donnez son expression en fonction des données du problème.
- (c) À l'aide des équations d'Euler-Lagrange et de votre réponse à la question précédente, démontrez que l'équation du mouvement sur θ s'écrit

$$\ddot{\theta} - \left(\frac{p}{mR^2} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

- (d) Calculez l'expression de la fonction E . On rappelle que

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}.$$

Est-ce que E correspond à l'énergie du système, et pourquoi ? Est-ce que E est conservée ?

- (e) Déduire de la question précédente que la trajectoire de la particule est déterminée par l'équation suivante :

$$t(\theta) = t_0 + \sqrt{\frac{mR^2}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{E - \frac{p^2}{2mR^2 \sin^2 \theta'} - mgR \cos \theta'}}, \quad (2)$$

où t_0 est l'instant initial, et où $\theta_0 = \theta(t_0)$.

Exercice 6

On rappelle que la propagation des rayons lumineux obéit aux deux règles suivantes :

- Soit un rayon passant par deux points A et B . Parmi tous les rayons possibles passant par A et B , le rayon effectivement suivi est celui qui minimise le temps de parcours des photons entre A et B (*Principe de Fermat*).
- La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu transparent d'indice de réfraction n est c/n , où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

On considère dans la suite un repère orthonormé $(Oxyz)$ où l'altitude $z = 0$ est au niveau du sol. Soient deux points $A(-\ell/2, 0, h)$ et $B(+\ell/2, 0, h)$, tous deux situés à la même altitude $h > 0$ au-dessus du sol et séparés d'une distance ℓ . On admet qu'un rayon lumineux passant par A et B se décrit par une fonction $z = z(x)$ pour $-\ell/2 \leq x \leq +\ell/2$. On suppose que l'air est un milieu d'indice

$$n(z) = 1 + \alpha z,$$

où α est une constante positive (cette formule ne s'appliquant que pour des valeurs limitées de z). Ceci est dû à une stratification en température (et donc en densité) de l'air au voisinage du sol.

- (a) Justifiez que le rayon lumineux passant effectivement par A et B minimise l'« action »

$$T[z(x)] = \frac{1}{c} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} dx \sqrt{1 + z'^2} (1 + \alpha z), \quad (3)$$

où $z' = dz/dx$.

- (b) Quel est le « lagrangien » $\mathcal{L}$ de ce système ? Calculez la fonction « énergie » E associée à ce lagrangien. Est-elle conservée et pourquoi ?
- (c) Dédurre de la question précédente que les rayons lumineux qui extrémisent le temps T donné à l'Eq. (3) sont de la forme

$$z(x) = \frac{1}{\beta} \cosh(\beta[x - x_0]) - \frac{1}{\alpha},$$

où β et x_0 sont des constantes.

Indication : On utilisera un changement de variables adaptées et le fait que

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1.$$

- (d) Montrez que $x_0 = 0$. Trouvez une relation entre β et h .
- (e) Tracez l'allure de la fonction $\cosh(x/2)/x$ pour $x > 0$.
- (f) Le point remarquable de cette courbe a pour coordonnées $(2.4, 0.754)$. En déduire que pour α et h fixés tel que $h + 1/\alpha > 0$, il y a une valeur maximale de la distance ℓ au-delà de laquelle il n'existe pas de rayon passant par A et B .
- (g) Tracez l'allure d'un rayon passant par A et B . En quoi ce résultat peut-il expliquer le phénomène de *mirage chaud* que l'on peut parfois observer dans le désert ?