Contrôle continu n° 2

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h 30
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

On considère la collision élastique représentée à la Fig. 1 : une particule (supposée ponctuelle) de masse m se meut avec une vitesse v_0 en direction d'une particule de masse $2m$ (elle aussi supposée ponctuelle) et initialement au repos. Le système formé par les deux masses est isolé de toute force extérieure.

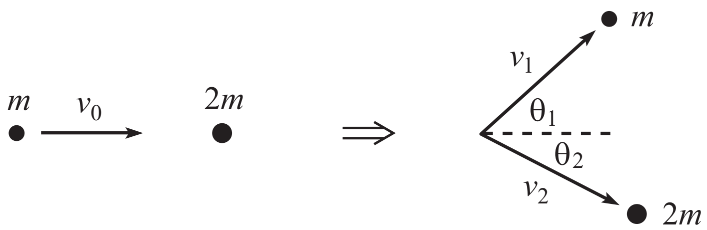

FIGURE 1

En supposant que les énergies des deux particules après le choc soient égales, déterminez les vitesses v_1 et v_2 des deux particules après le choc en fonction de v_0, ainsi que les deux angles de déflection θ_1 et θ_2.

Indication : La meilleure façon de déterminer θ_1 et θ_2 est de mettre au carré certaines équations du problème (sous une forme appropriée) et d'utiliser le fait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exercice 2

(a) Soit une sphère creuse (de petit rayon r_1 et de grand rayon r_2), de densité uniforme de masse ρ et de masse M (voir Fig. 2). Déterminez le moment d'inertie I de cet objet par rapport à un axe de rotation passant par son centre en fonction de M, r_1 et r_2. On spécifiera sur un schéma le système de coordonnées utilisé dans le calcul.

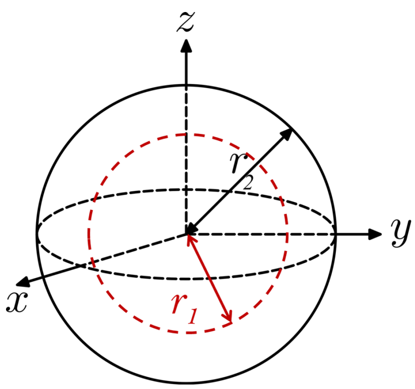

FIGURE 2

(b) On dispose maintenant la sphère creuse de la Fig. 2 sur un plan incliné qui forme un angle θ avec l'axe horizontal. La sphère est initialement au repos et l'on suppose qu'elle roule sans glisser sur le plan incliné. Calculez l'accélération linéaire a de l'objet en utilisant la conservation de l'énergie. Vous exprimerez votre résultat en fonction de l'accélération de la pesanteur g, de l'angle θ, du moment d'inertie I, de la masse M, et du rayon r_2.

(c) Déterminez à présent l'accélération a en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique et la notion de moment des forces.

(d) Considérons les deux cas limites d'une sphère pleine ($r_1/r_2 = 0$) et d'une sphère presqu'entièrement creuse ($r_1/r_2 = 1^-$). Dans quel cas limite l'accélération a est-elle la plus grande ?

Exercice 3

On considère le pendule double représenté à la Fig. 3 et constitué de deux particules ponctuelles de même masse m et de deux tiges rigides de même longueur l (dont on néglige les masses), placé dans le champ de pesanteur d'accélération g. On suppose que les deux masses oscillent dans le même plan vertical. On néglige tout frottement de l'air. Soit θ_1 (θ_2) l'angle que forme la masse du haut (du bas) avec la verticale.

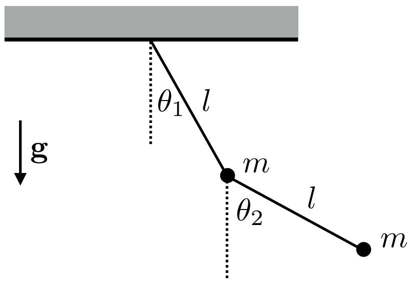

FIGURE 3

(a) Montrer que le lagrangien du système a pour expression

$$\mathcal{L} = ml^2 \left[\dot{\theta}_1^2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

(b) En déduire les équations du mouvement.

(c) Dans la limite des petits angles ($\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$), montrez que les équations du mouvement se réduisent à

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{2g}{l}\theta_1 = 0,$$
$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0.$$

(d) Initialement, à $t = 0$, on suppose que $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(0) = \epsilon$, avec $\epsilon \ll 1$. Déterminez les accélérations angulaires des deux masses du double pendule à $t = 0^+$, c'est-à-dire immédiatement après le lâcher.