# Examen

*Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.*
*Durée de l'épreuve : 2h*
*Le sujet contient 4 pages au total*

## Exercice 1

(a) On considère un système à un degré de liberté, décrit par la coordonnée généralisée $q$ et par le moment $p$ conjugué à $q$, et dont le mouvement est gouverné par le hamiltonien $H(q,p,t)$. Donnez, sans justification, les équations de Hamilton.

(b) Quelle est la définition d'une transformation canonique ?

(c) Montrez que la transformation

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \qquad P = q\cot p,$$

avec $\cot p = 1/\tan p$, est canonique.

## Exercice 2

On considère un système dynamique à un degré de liberté $q(t)$ (on note $\dot{q}(t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ la vitesse généralisée) et on postule l'existence d'une fonction $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ appelé lagrangien qui permet de définir l'action entre deux instants définis, $t_1$ et $t_2$, par l'expression

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q,\dot{q},t),$$

où $q$ et $\dot{q}$ sont des fonctions de $t$. Le *principe d'action stationnaire* (ou principe de Hamilton) stipule que les équations du mouvement (appelées équations d'Euler–Lagrange) sont obtenues en rendant l'action extrémale entre $t_1$ et $t_2$, c'est-à-dire en imposant la condition

$$\delta S = S[q+\varepsilon\eta] - S[q] = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{1}$$

où $\eta = \eta(t)$ est une fonction qui s'annule aux bornes de l'intégrale, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ (cf. Fig. 1) et où $\varepsilon$ est un réel arbitrairement petit.

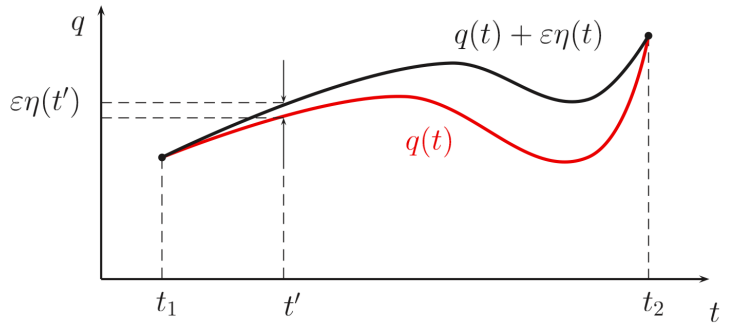


Figure 1

(a) Développez $\mathcal{L}(q+\varepsilon\eta, \dot{q}+\varepsilon\dot{\eta}, t)$ au premier ordre en $\varepsilon \ll 1$, puis, à l'aide de la condition (1), établissez l'équation d'Euler–Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}.$$

(b) Les trois questions suivantes traitent d'un exemple d'utilisation des équations d'Euler–Lagrange. On tend une bulle de savon entre deux anneaux co-axiaux de même rayon $R$, d'axe $(Oz)$, comme schématisé sur la Fig. 2. L'anneau supérieur est placé dans le plan $z = +h$, l'anneau inférieur dans le plan $z = -h$. On adopte les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$. La position d'équilibre de la surface de la bulle correspond à l'aire minimale. Montrez que cela revient à minimiser la grandeur $A$ ci-dessous qui joue un rôle analogue à celui de l'action en mécanique analytique :

$$A = 2\pi \int_{-h}^{+h} \mathrm{d}z \, r\sqrt{1 + \dot{r}^2},$$

où $r = r(z)$ et $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}z$, avec les conditions aux limites $r(-h) = r(+h) = R$.

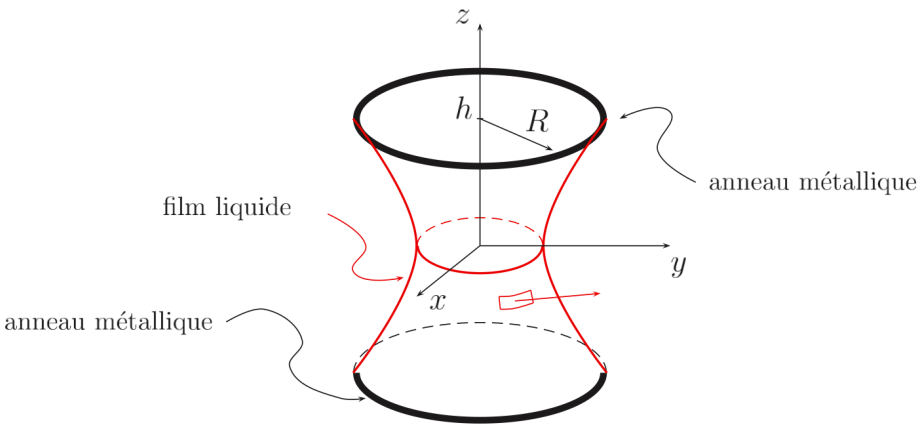


FIGURE 2 – Bulle de savon tendue entre deux anneaux métalliques identiques.

(c) Démontrez que l'équation d'Euler–Lagrange donne alors

$$1 + \dot{r}^2 = r\,\ddot{r}.$$

(d) Vérifiez que la solution de cette équation est $r(z) = a\cosh(z/a)$ avec $R = a\cosh(h/a)$. Tracez $r$ en fonction de $z$. Quelle est le nom de cette surface minimale ?

## Exercice 3

Un fil de fer rigide et indéformable a la forme d'une parabole orientée vers le haut, d'équation $z = \alpha r^2$ avec $\alpha > 0$, où $(r, \theta, z)$ sont les coordonnées cylindriques usuelles (voir Fig. 3). Le fil de fer a un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire $\omega$, autour de son axe de symétrie $(Oz)$. Une perle de masse $m$, supposée ponctuelle, dans le champ de gravitation (selon $-\hat{z}$, accélération de la pesanteur : $g$) est enfilée sur le fil de fer. On cherche dans cet exercice à décrire le mouvement de la perle.

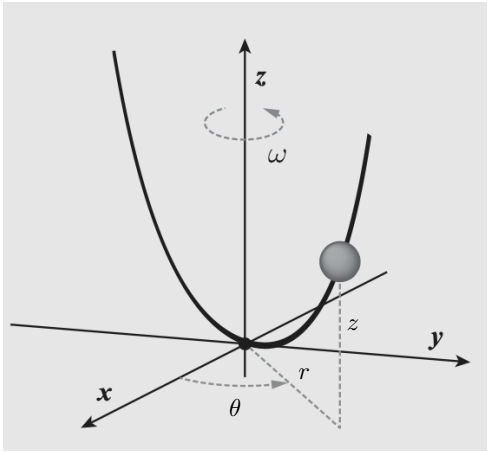


FIGURE 3

(a) À l'aide des contraintes (quelles sont-elles ?), déterminez le lagrangien de la perle $\mathcal{L}(r, \dot{r})$ en fonction de la coordonnée généralisée $r$ et de la vitesse généralisée associée $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, et en fonction de $\alpha$, $\omega$, $m$ et $g$.[1]

(b) Montrez que l'équation du mouvement de la perle s'écrit

$$\left(1 + 4\alpha^2 r^2\right) \ddot{r} + 4\alpha^2 r \dot{r}^2 + \left(2g\alpha - \omega^2\right) r = 0.$$

(c) Montrez que le hamiltonien de la perle s'écrit

$$H(r, p) = \frac{p^2}{2m(1 + 4\alpha^2 r^2)} + V_{\text{eff}}(r), \tag{2}$$

où $p$ est le moment conjugué à la variable $r$, et où le potentiel *effectif* $V_{\text{eff}}$ a pour expression

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{m}{2}\left(\omega_{\text{c}}^2 - \omega^2\right) r^2, \tag{3}$$

avec $\omega_{\text{c}}$ une fréquence critique que l'on exprimera en fonction de $g$ et $\alpha$.

(d) Le hamiltonien (2) est-il conservé ? Justifiez votre réponse.

(e) Le hamiltonien (2) correspond-il à l'énergie de la perle ? Justifiez votre réponse.

(f) Sur un même graphique, esquissez le potentiel effectif (3) pour $\omega > \omega_{\text{c}}$, $\omega < \omega_{\text{c}}$, et $\omega = \omega_{\text{c}}$.

(g) À l'aide de vos réponses aux questions précédentes, discutez de la stabilité du système en fonction de la valeur prise par $\omega$.

## Exercice 4

On considère un pendule simple, de masse $m$ et de longueur $l$, contraint de se déplacer dans le plan $(Oxy)$ (cf. Fig. 4). Dans la suite, on utilise les coordonnées polaires usuelles $(r, \theta)$. Les conditions initiales sont $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

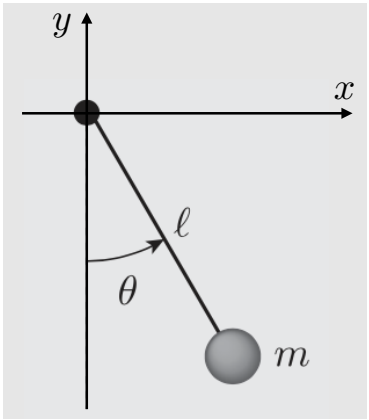


FIGURE 4

À l'aide de la *méthode des multiplicateurs de Lagrange*, montrez que la tension dans la tige est donnée par

$$\mathbf{T} = -mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)\hat{r},$$

où $g$ est l'accélération de la pesanteur.

Indication : on pourra utiliser la conservation de l'énergie afin de déterminer $\dot{\theta}^2$ en fonction de $g$, $l$, $\theta$ et $\theta_0$.

1. On rappelle l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques : $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{z}$.

## Exercice 5

(a) On considère un système à $N$ degrés de libertés décrit par les coordonnées généralisées $q_i$ et leurs moments généralisés associés $p_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. Le hamiltonien du système est $H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t)$. Soit une fonction $f(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t)$ quelconque définie dans l'espace des phases. Montrez que l'évolution temporelle de $f$ est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

où $\{f, H\}$ dénote le crochet de Poisson de $f$ et $H$.

(b) On considère à présent un système à $N = 2$ degrés de liberté, de hamiltonien

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 + a q_1^2 - b q_2^2,$$

avec $a$ et $b$ deux constantes réelles, et où $(q_1, p_1)$ et $(q_2, p_2)$ sont des variables canoniquement conjuguées. En utilisant la question précédente, montrez que

$$f_1 = q_1 q_2 \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{1}{q_1}(p_2 + b q_2)$$

sont des quantités conservées.