Mécanique Analytique

L2 - Physique 2022-2023

Paul-Antoine Hervieux
Unistra/IPCMS
hervieux@unistra.fr

I) Principes variationnels

Principes variationnels

“La nature agit toujours par les voies les plus courtes”

Pierre de Fermat

(1601-1665)

Principes variationnels

Généralités:

- C'est l'un des plus grands principes de la Physique
- C'est un principe d'optimalité
- Toutes les lois de la Physique peuvent s'écrire sous cette forme

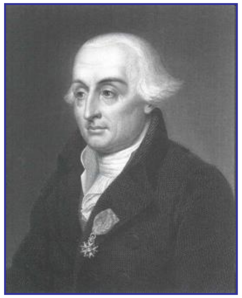
Principes variationnels = problème d'optimisation sous contraintes

Histoire:

1) Principe de **Fermat** pour l'optique géométrique au 17ème
2) Calcul variationnel développé par **Euler** et **Lagrange** au 18ème
3) Principe de la moindre quantité d'action de **Maupertuis** au 18ème

(1601-1665)

(1707-1783)



(1736-1813)

(1698-1759)

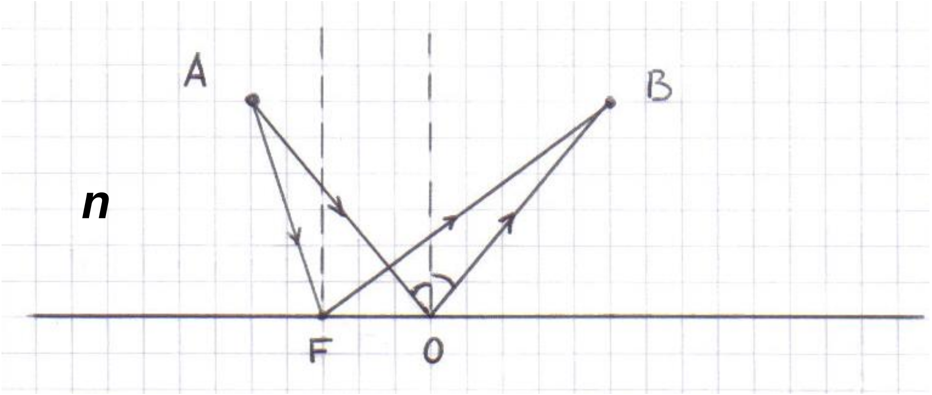
Principes variationnels

1) Principe de **Fermat** pour l'optique géométrique

Hypothèse:
Le temps mis par la lumière pour parcourir une certaine distance dans un milieu est proportionnel à la « résistance » de ce milieu au passage de la lumière.

→ Principe de moindre temps ou principe d'économie naturelle

a) réflexion



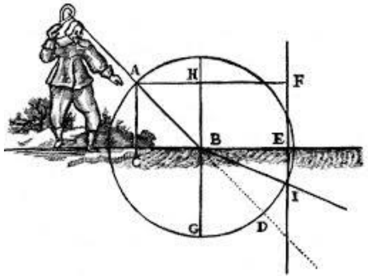
Même milieu → même indice ***n***
→ même vitesse de la lumière ***v = c / n***

A: émetteur
B: observateur

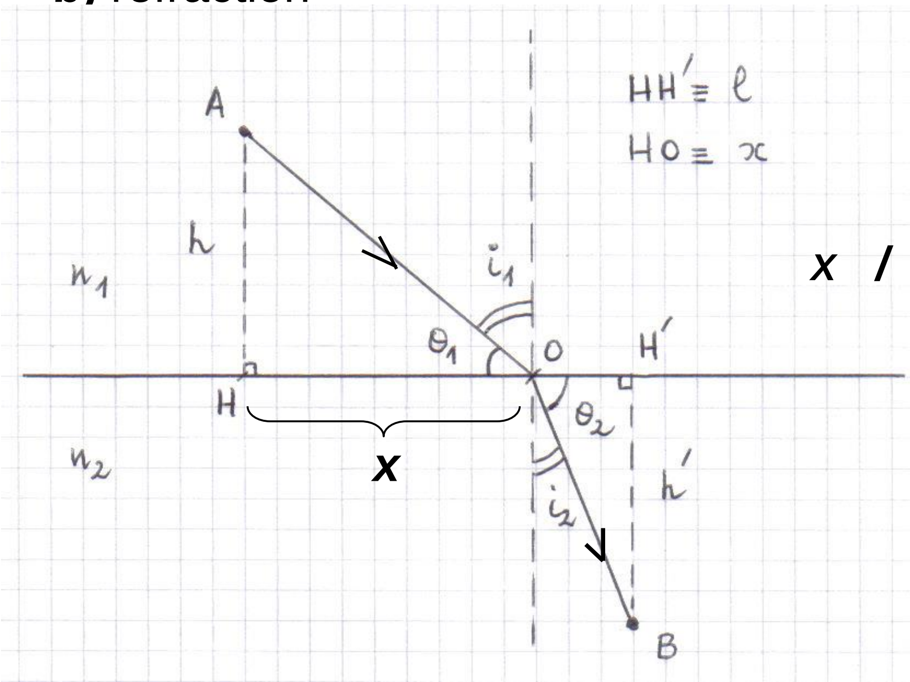
Le chemin AFB est le plus long ∀ F # O

Principes variationnels

1) Principe de Fermat pour l'optique géométrique



b) réfraction



$$
\begin{aligned}
AO^2 &= h^2 + x^2 \\
OB^2 &= h'^2 + (l-x)^2 \\
L &= n_1 AO + n_2 OB : \text{chemin optique} \\
v_1 &= c/n_1,\ v_2 = c/n_2 \Rightarrow T = L/c = (n_1 AO + n_2 OB)/c \\
T &= \left(n_1\sqrt{h^2+x^2} + n_2\sqrt{h'^2+(l-x)^2} \right)/c
\end{aligned}
$$

Principe de moindre temps

***x* / ** $\dfrac{dT}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n_1 x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \dfrac{n_2(l-x)}{\sqrt{h'^2+(l-x)^2}}$

$\Rightarrow \quad n_1 \cos\theta_1 = n_2 \cos\theta_2$

$\Rightarrow \quad \boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

Loi de Descartes-Snell

(1596-1650)

Principes variationnels

1) Principe de Fermat pour l'optique géométrique

b) réfraction

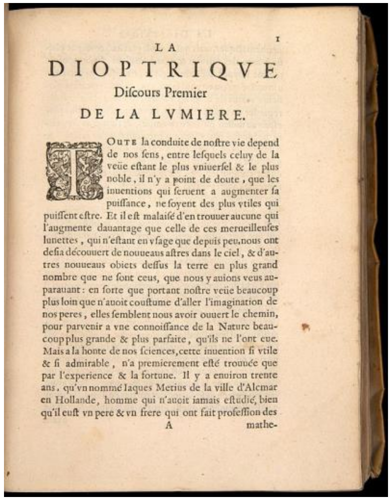
Unité de longueur: *h*
Unité de vitesse: *c*
Unité de temps: *h* / *c*

$$\bar{x} \equiv x/h \; ; \; \bar{T} \equiv T/(h/c)$$

$$T = \frac{h}{c}\left(n_1\sqrt{1+(x/h)^2} + n_2\sqrt{(h'/h)^2 + [(l-x)/h]^2}\right)$$

$$\bar{T} = \left(n_1\sqrt{1+\bar{x}^2} + n_2\sqrt{\bar{h}'^2 + (\bar{l}-\bar{x})^2}\right)$$

variables <u>adimensionnées</u>


1

LA

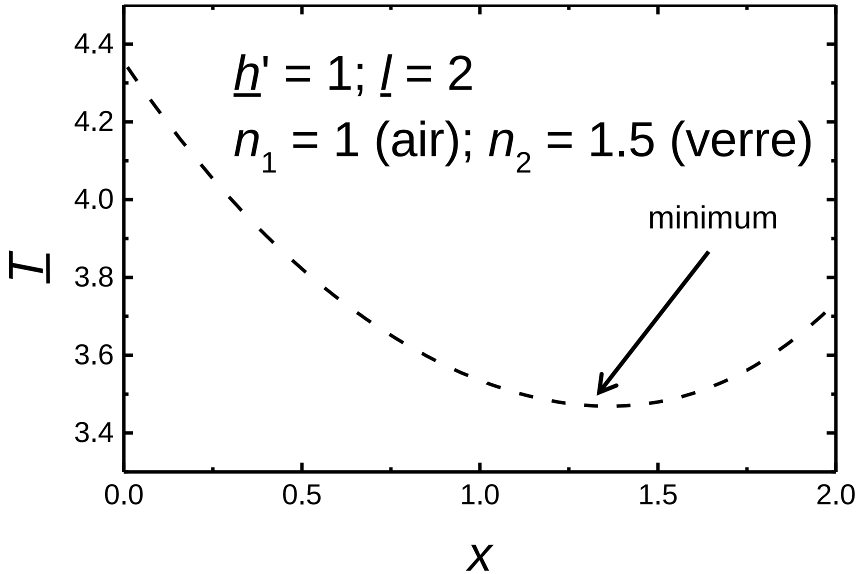
DIOPTRIQVE

Discours Premier

DE LA LVMIERE.

TOute la conduite de nostre vie depend de nos sens, entre lesquels celuy de la veüe estant le plus vniuersel & le plus noble, il n'y a point de doute, que les inuentions qui seruent a augmenter sa puissance, ne soyent des plus vtiles qui puissent estre. Et il est malaisé d'en trouuer aucune qui l'augmente dauantage que celle de ces merueilleuses lunettes, qui n'estant en vsage que depuis peu, nous ont desia découuert de nouueaus astres dans le ciel, & d'autres nouueaus obiects dessus la terre en plus grand nombre que ne sont ceus, que nous y auions veus auparauant: en sorte que portant nostre veüe beaucoup plus loin que n'auoit coustume d'aller l'imagination de nos peres, elles semblent nous avoir ouuert le chemin, pour parvenir a vne connoissance de la Nature beaucoup plus grande & plus parfaite, qu'ils ne l'ont eue. Mais a la honte de nos sciences, cette inuention si vtile & si admirable, n'a premierement esté trouuée que par l'experience & la fortune. Il y a enuiron trente ans, qu'vn nommé Iaques Metius de la ville d'Alcmar en Hollande, homme qui n'auoit iamais estudié, bien qu'il eust vn pere & vn frere qui ont fait profession des

A mathe-

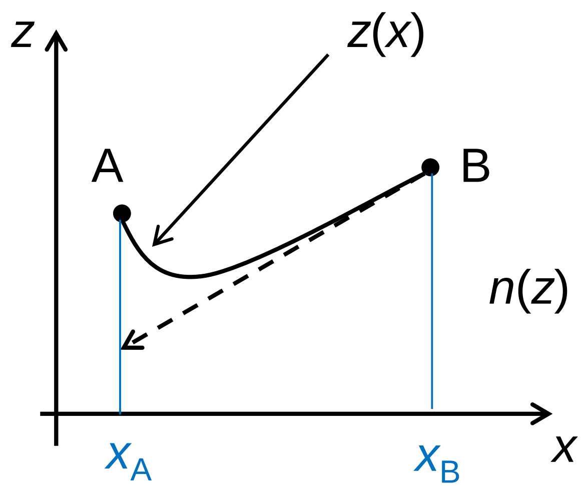


Principes variationnels

c) Rayons courbes

Considérons la propagation de la lumière dans un milieu dont l'indice de réfraction varie continûment d'un point à un autre.

→ Les rayons se propagent selon des courbes et non plus selon des droites !



$$d\tau = n(z)\frac{dl}{c} = n(z)\frac{\sqrt{dx^2+dz^2}}{c} = n(z)\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{c}dx$$

$$d\tau = n(z)\frac{\sqrt{1+\dot{z}(x)^2}}{c}dx \quad \text{avec} \quad \dot{z}(x) \equiv \frac{dz}{dx}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad T = \frac{1}{c}\int_A^B n(z)\sqrt{1+\dot{z}(x)^2}\,dx}$$

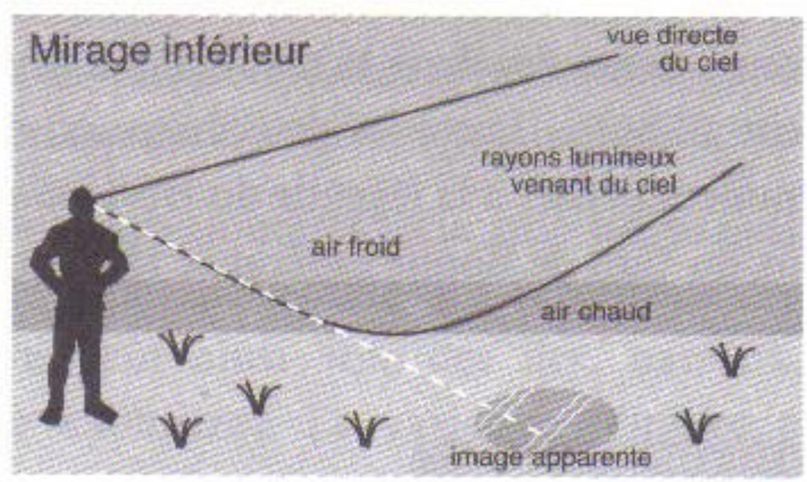
Pb: trouver la trajectoire $z(x)$ d'un rayon de lumière se propageant dans un milieu d'indice $n(z)$, allant d'un point $A(x_A,z_A)$ à un point $B(x_B,z_B)$.

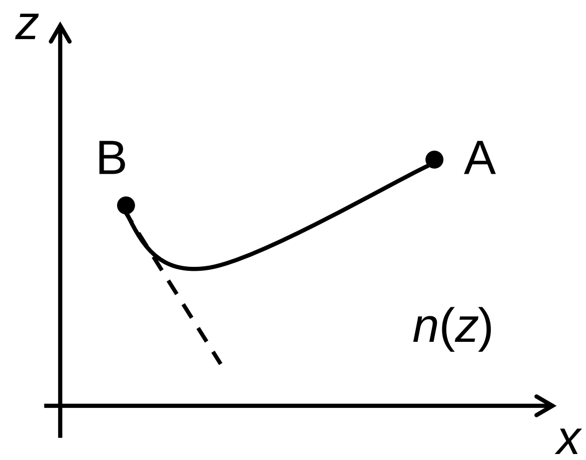
Math: trouver la fonction $z(x)$ qui minimise T avec les contraintes: $z(x_A)= z_A$ et $z(x_B)= z_B$.

→ **Calcul des variations**

Principes variationnels

Mirage <u>inférieur</u>





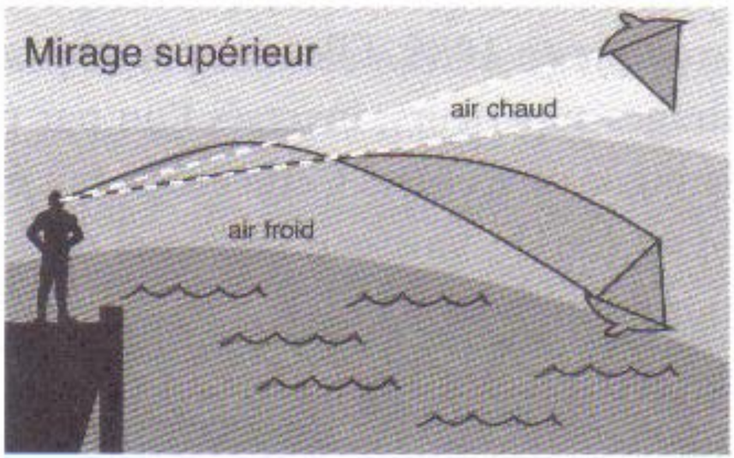
Route fortement chauffée l'été: l'air est moins dense au niveau de la route car la température est plus élevée

$$T \searrow \quad z \nearrow \;\Rightarrow\; \rho \nearrow \quad z \nearrow \;\Rightarrow\; n \nearrow \quad z \nearrow$$

L'image apparente se trouve <u>au dessous </u>de l'objet

Principes variationnels

Mirage <u>supérieur</u>



$$T \nearrow \quad z \nearrow \;\Rightarrow\; \rho \searrow \quad z \nearrow \;\Rightarrow\; n \searrow \quad z \nearrow$$

L'image apparente se trouve <u>au dessus </u>de l'objet

Principes variationnels

2) Calcul des variations d'**Euler**-**Lagrange**

z(x) → *y(x)*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) \, dx$$

Pb: On veut trouver la fonction ***y*(*x*)** qui minimise (ou maximise) l'intégrale *I* où les extrémités sont fixes. *I* est une **fonctionnelle** !

Problèmes typiques:

- Mirages → minimise le temps de parcours de la lumière
- Corde pesante → minimise l'énergie potentielle de pesanteur
- Films de savon → minimise l'énergie potentielle de surface
- Brachistochrone → minimise le temps de parcours dans le champ de pesanteur
- Géodésiques → minimise la distance entre deux points sur une surface

Principes variationnels

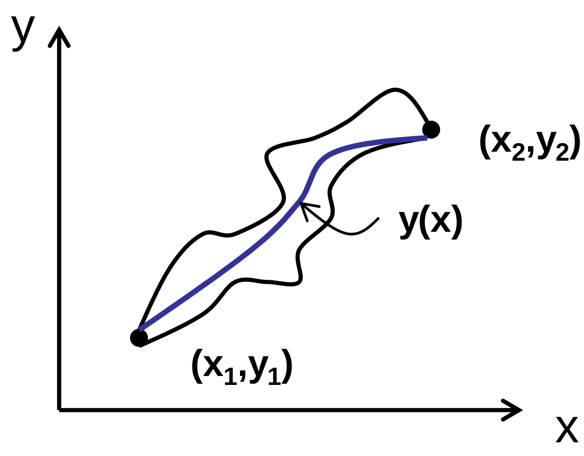
La condition <u>nécessaire et suffisante</u> pour que l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx$$

soit stationnaire avec les conditions $y(x_1)=y_1$ et $y(x_2)=y_2$ est que l'équation différentielle dite d'**Euler**

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0}$$

soit satisfaite.



<u>L'inconnue est une fonction</u> !

Principes variationnels

Généralisation à plusieurs variables

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2, ..., y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n, x)\, dx$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_k} = 0 \quad k = 1, 2, ..., n}$$

Système d'équations différentielles couplées du <u>deuxième ordre</u> en y

(présence de $\ddot{y}$)

Principes variationnels

Propriétés:

équation différentielle du second ordre

- $$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}}\dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2}\ddot{y} = 0}$$

Formule de **Beltrami**

- Si *f* ne dépend pas <u>explicitement</u> de *x* → $$\boxed{\exists\, k \;/\; f - \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = k}$$

$$f(y, \dot{y}, \cancel{x})$$

(1835-1900)

Principes variationnels

Multiplicateur de Lagrange

Soit *I* la quantité a minimiser

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx$$

Dans les problèmes, on rencontre souvent (*e.g.* chaînette) une contrainte se présentant sous la forme d'une intégrale devant rester constante. On montre que si la contrainte s'exprime par une intégrale de la forme

$$\int_{x_1}^{x_2} g(y, \dot{y}, x) dx = k$$

on doit substituer à *f* la fonctionnelle

$$\boxed{h(y, \dot{y}, x) = f(y, \dot{y}, x) - \lambda g(y, \dot{y}, x)}$$

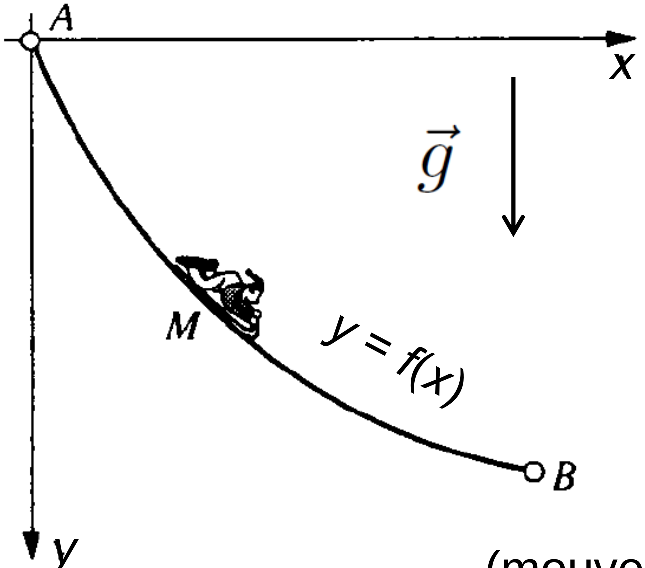
où λ est appelé **multiplicateur de Lagrange** qui sera évalué ultérieurement en utilisant les données et les conditions initiales du problème étudié.

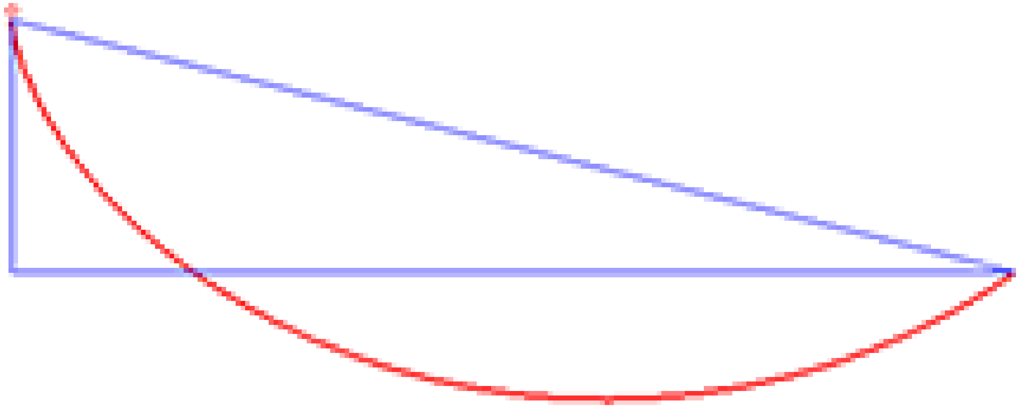
Principes variationnels

Exemple I: **la brachistochrone**

Définition: courbe qui minimise le temps de parcours d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur.

Acta Eruditorum, the first scientific journal, began publication in 1682. In the June 1696 issue of this journal, there appeared a note by the famous Swiss scholar **Johann (Jean) Bernoulli** (1667-1748) with the intriguing title, "*A new problem that mathematicians are invited to solve*."

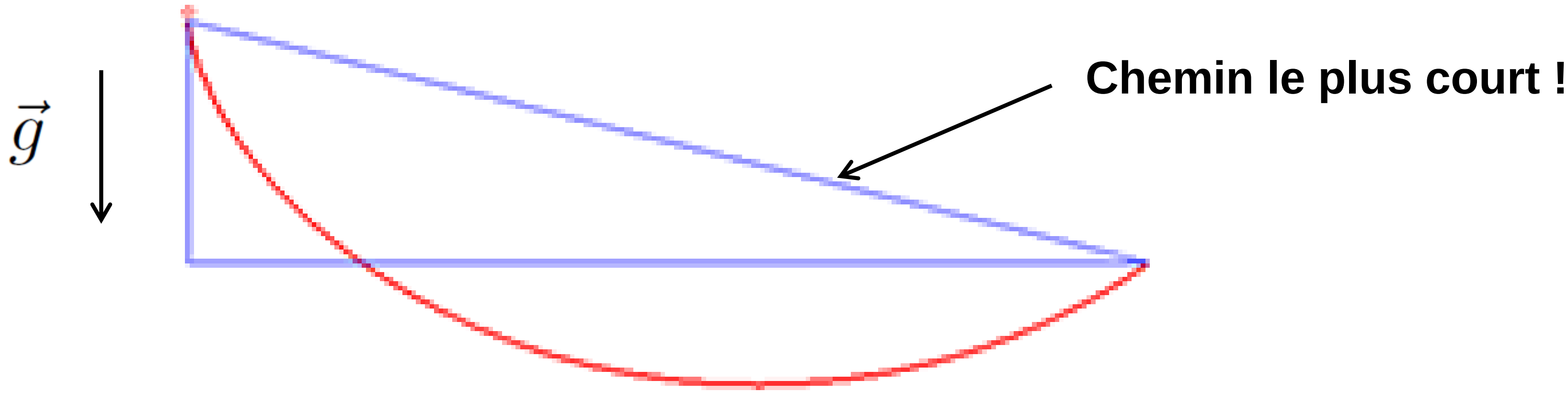




(mouvement dans le plan vertical)

Principes variationnels

Brachistochrone (suite)

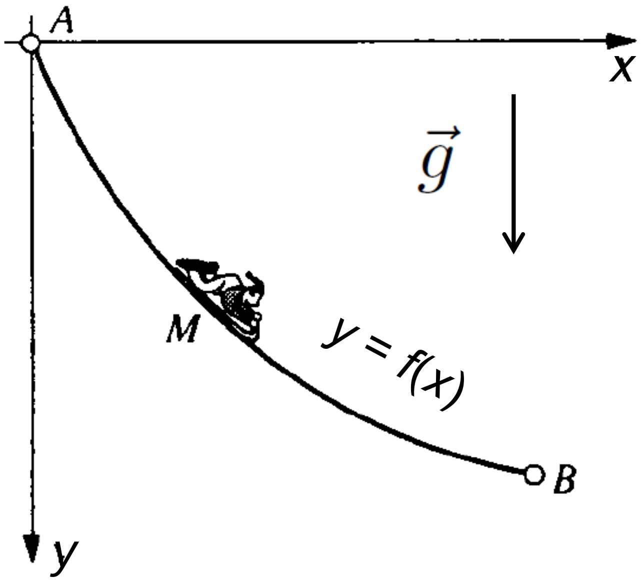


« If one considers motions with the same initial and terminal points then, the shortest distance between them being a straight line, one might think that the motion along it needs least time. It turns out that this is not so. »

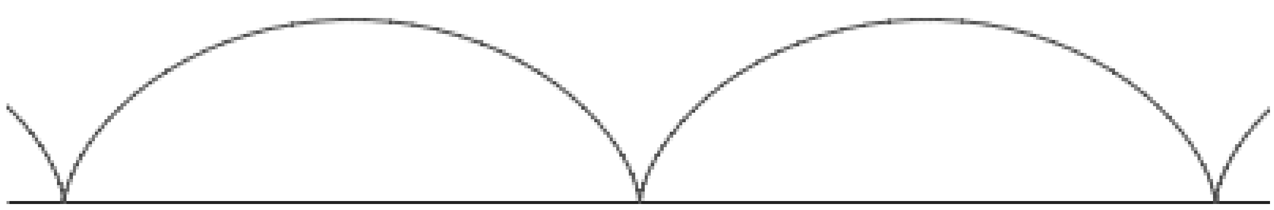
Galileo Galilei (1564-1642)

Principes variationnels

Brachistochrone (suite)



la solution est un arc de **cycloïde**



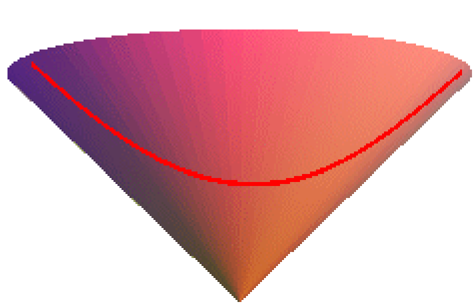
Principes variationnels

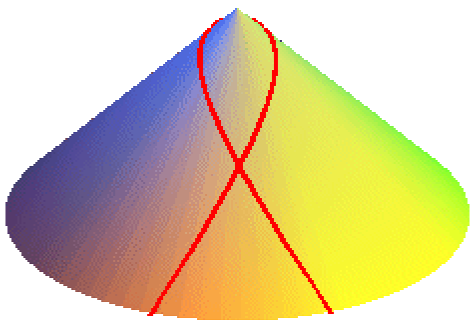
Brachistochrone (suite et fin)

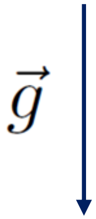
Ligne brachistochrone d‘une surface (non plane)

Une ligne brachistochrone d'une surface est une courbe sur laquelle doit glisser sans frottement un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme de sorte que le temps de parcours soit minimal parmi toutes les courbes joignant deux points de la courbe, quels que soient les choix de ces deux points. Autrement dit, ce sont les lignes les plus courtes en temps, alors que les géodésiques sont les lignes les plus courtes en distance cf. dia suivante).

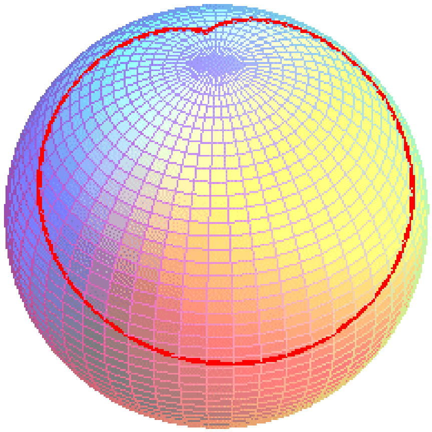
- Sur un **cône** de révolution:







- Sur une **sphère**:

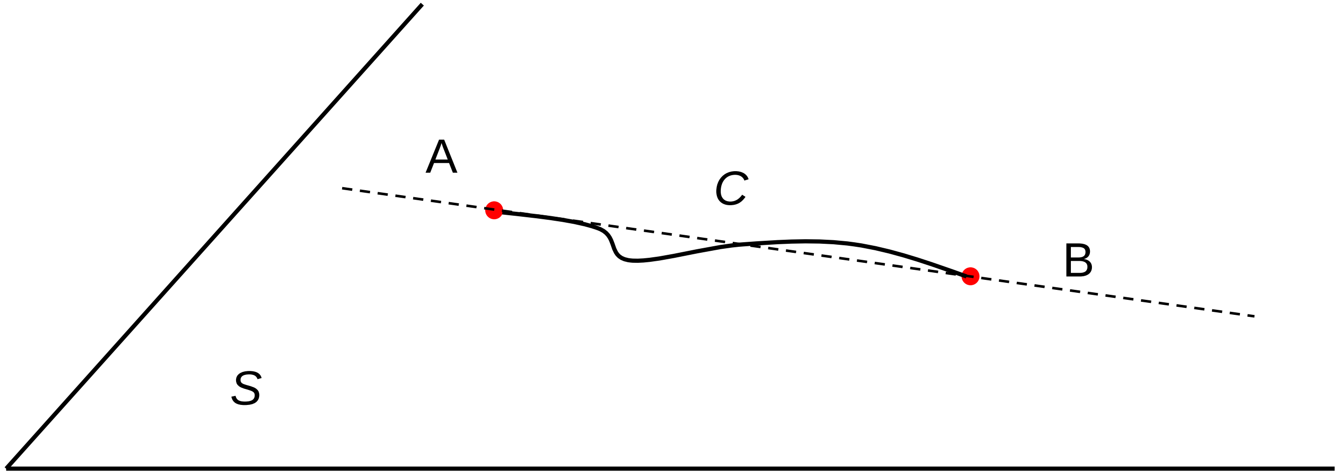


Principes variationnels

Exemple II: **Géodésiques**

Définition: Une courbe *C*, tracée sur une surface *S*, s'appelle une **géodésique** si, quelque soient les points A et B sur C, le plus court chemin joignant A à B tout en restant sur la surface *S* est obtenu en suivant *C*.

Cas du plan:

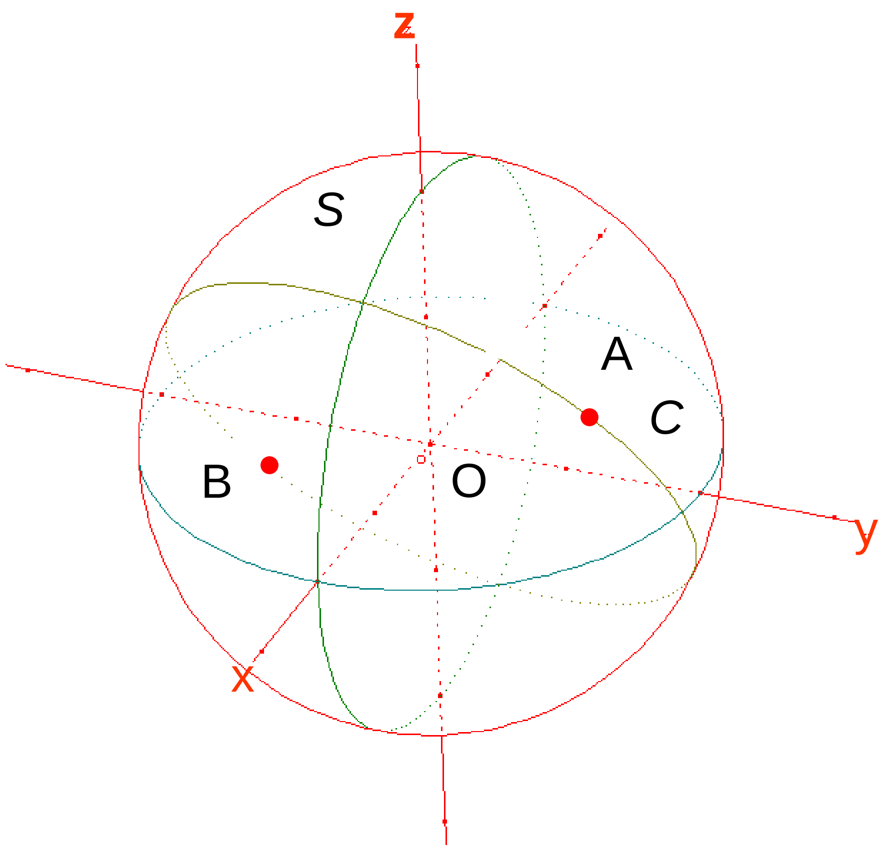


Rq: La métrique de *S* est euclidienne → la solution est une ligne droite

Principes variationnels

Géodésiques (suite)

Cas de la sphère:



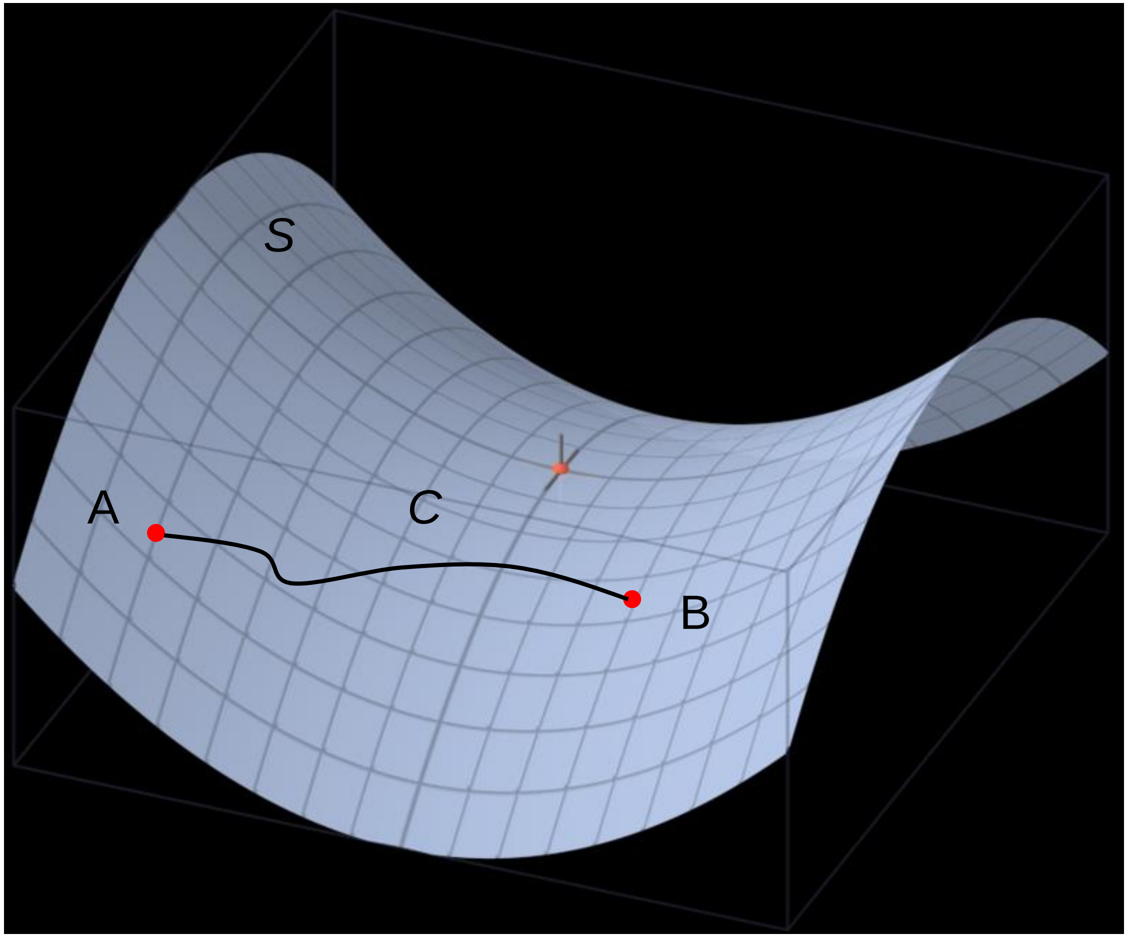
Les géodésiques de la sphère

Le plus court chemin pour aller du pôle nord au pôle sud est de suivre un **méridien**. Plus généralement, tout **grand cercle** (c'est-à-dire l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre O) définit une géodésique de la sphère, et réciproquement toute géodésique de la sphère est un arc de grand cercle.

Principes variationnels

Géodésiques (suite)

Pour une surface quelconque le problème est beaucoup plus difficile !

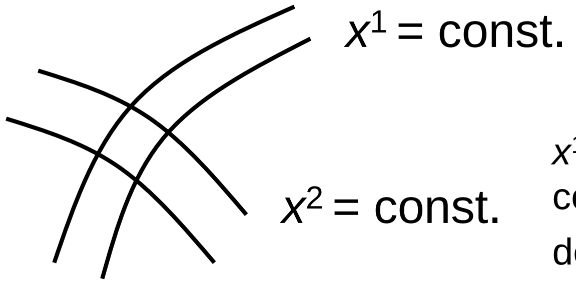


Principes variationnels

Géodésiques (suite et fin pour la culture)

$$dl^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

Tenseur métrique



x^1 et x^2 sont des coordonnées locales de la surface

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0 \quad , \quad j = 1, 2$$

$$\Gamma^j_{ki} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Symboles de **Christoffel**

Mots clés: géométrie différentielle; métrique, relativité générale…

Principes variationnels

Exemple III: **surface minimale**

Définition: En mathématique et en physique, une **surface minimale** est une surface minimisant son aire. Ce minimum est réalisé sous une contrainte: un ensemble de points, le bord de la surface, est d'avance déterminé.

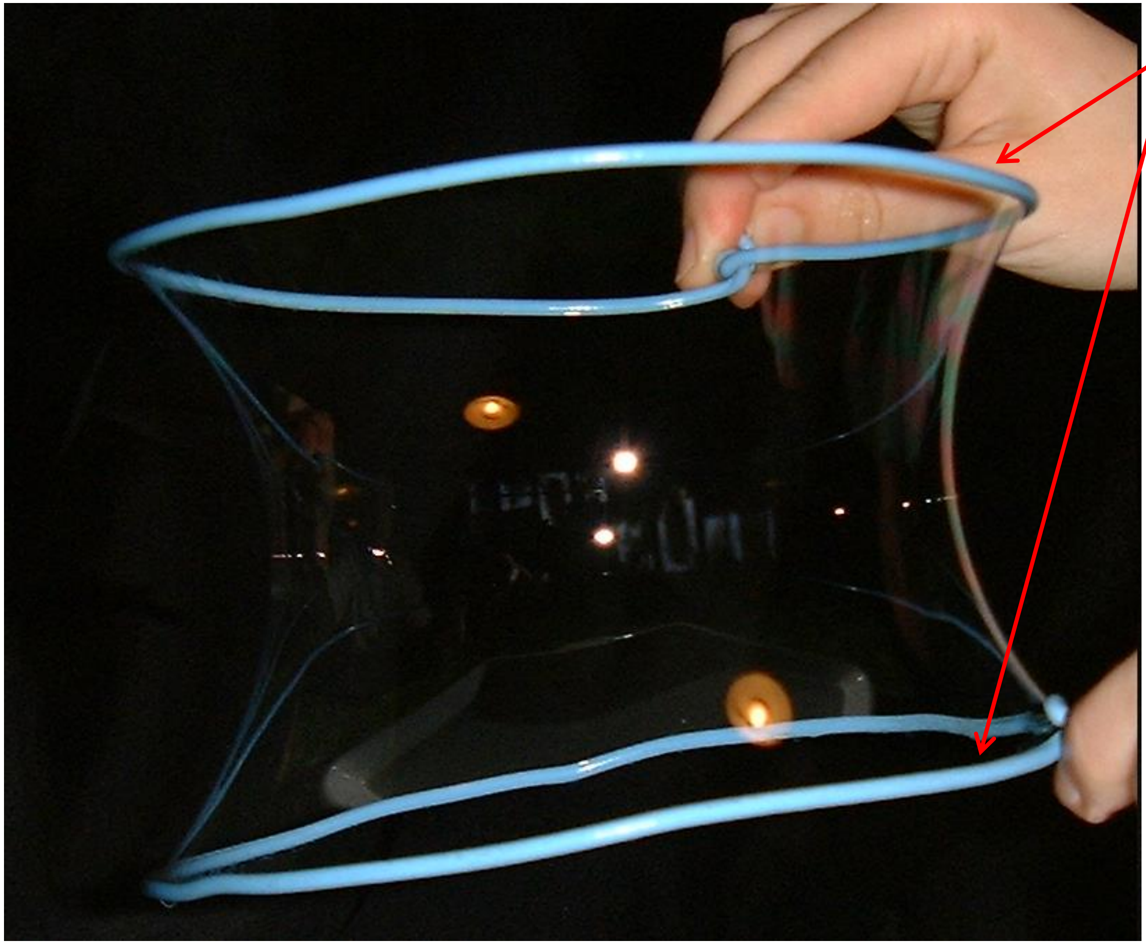
Une surface minimale est une surface dont l'aire ou le volume ne peut qu'augmenter lorsqu'on lui applique une perturbation suffisamment petite. Les surfaces minimales forment donc l'analogue en dimension supérieure des **géodésiques** (courbes dont la longueur ne peut qu'augmenter sous l'effet d'une perturbation assez petite et assez localisée).

Principes variationnels

surface minimale (suite)

Film de savon: minimisation de l'énergie potentielle: $U = \sigma A$ ← aire de *S*

tension superficielle



bords de la surface

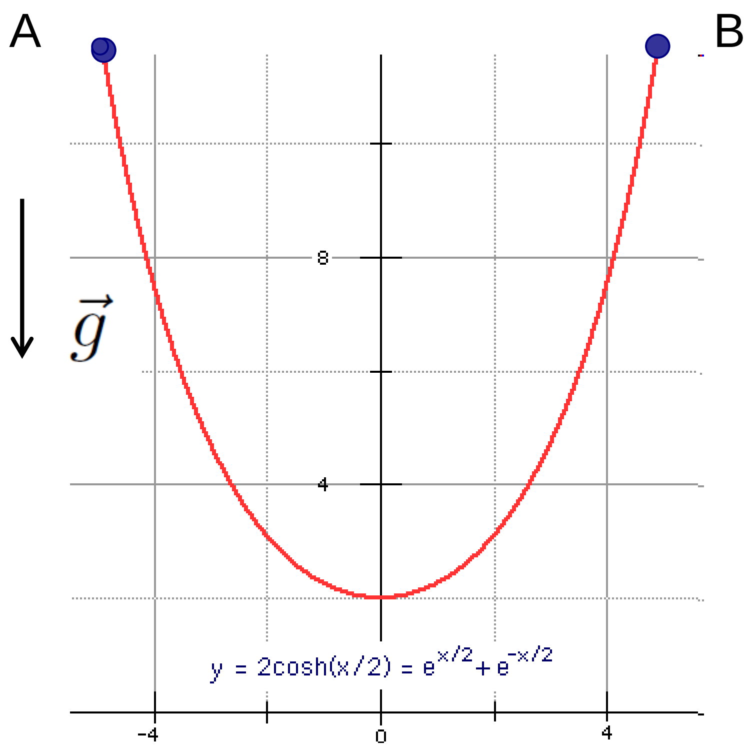
caténoïde

Principes variationnels

Exemple IV: figures d'équilibre (Bernoulli)

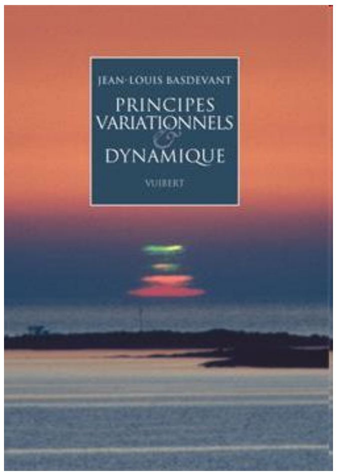
Définition: configuration d'un fil (ou d'une corde) soumis à la pesanteur, de longueur *L*, de masse linéique ρ et fixé entre deux points A et B.

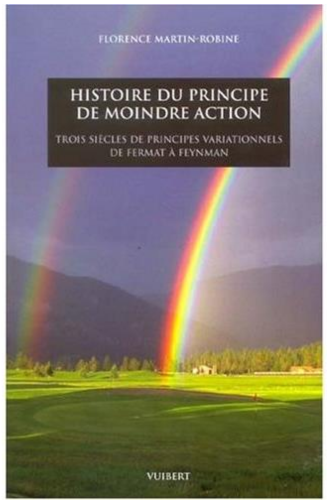
On doit minimiser l'énergie potentielle de pesanteur avec la contrainte que le fil est <u>inextensible</u>.

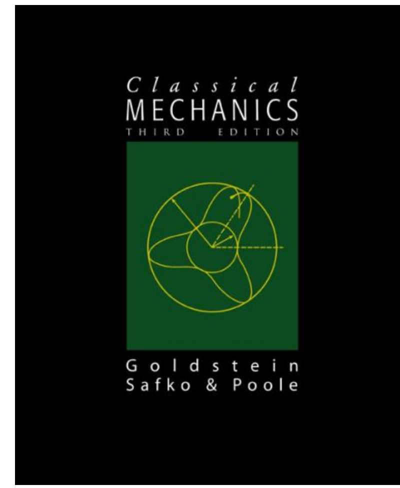


La chaînette

Bibliographie







- Landau, *Mécanique*
- Goldstein , *Classical Mechanics*
- Florence Martin-Robine, *Histoire du principe de moindre action*
- Jean-Louis Basdevant, *Principes variationnels et dynamique*