L2

Mécanique Analytique

TD série 01: Principes variationnels

1 Plus petite distance dans un plan

Quelle est la courbe $y(x)$ qui minimise la distance entre deux points A et B dans un plan ?

2 Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, 1 (x_1, y_2) et 2 (x_2, y_2), et en la faisant tourner autour de l'axe y. Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale. Paramétriser la courbe selon $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$. Trouver la valeur de la surface.

3 Problème de la chaînette

Trouver la configuration d'un fil soumis à la pesanteur, de masse linéique ρ et de longueur L, fixé entre deux points $A(0, y_0)$ et $B(a, y_1)$. Résoudre ce problème on utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

4 Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur un point matériel de masse m glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (x, y). Si le point matériel est initialement immobile à l'origine O, trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $P(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications :

- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y.
- Choisir la paramétrisation $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$.
- Utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.
- Est-il possible que la forme idéale du rail passe par un point où $y > y_0$?

5 Géodésiques

Quelle est la courbe qui minimise la distance entre deux points A et B sur une sphère de rayon R ? sur une surface quelconque ?

6 Isopérimètre

Soient deux points A et B situés sur l'axe (Ox). On veut trouver la nature de la courbe (C) décrite par une corde inextensible, de longueur donnée l, afin que l'aire intérieure obtenue, entre (C) et l'axe des abscisses, soit maximale.