TD 2
Principe fondamental de la dynamique

1 Isolement d'un solide – diagramme du corps libre

Exercice 1

(a) On considère la machine d'Atwood de la Fig. 1(gauche) : une poulie sans masse est suspendue à un support fixe. Celle-ci relie via un fil dont on néglige le poids deux masses ponctuelles m_1 et m_2. Déterminez respectivement les accélérations a_1 et a_2 des masses m_1 et m_2, ainsi que la tension T dans le fil.

(b) On considère la machine d'Atwood de la Fig. 1(droite). Déterminez les accélérations des trois masses ponctuelles m_1, m_2, et m_3.

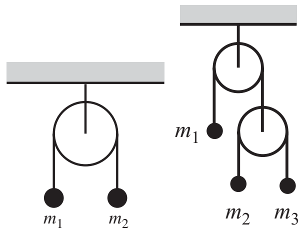

Figure 1

Exercice 2

(a) Un bloc de masse m, initialement au repos, glisse le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. On néglige toute force de friction entre le bloc et le plan incliné. Quelle doit-être la valeur de θ de sorte que le bloc parcourt une distance horizontale donnée en un minimum de temps ?

(b) Même question, en considérant maintenant qu'il existe une friction cinétique μ entre le bloc et le plan incliné.

Exercice 3

Un bloc de masse m est maintenu immobile sur un plan incliné de masse M et d'angle d'inclinaison θ (voir Fig. 2). Le plan incliné est initialement au repos sur une surface horizontale. Dans la suite, on néglige toutes forces de friction entre le bloc et le plan incliné, et le plan incliné et la surface horizontale. On lâche alors le bloc. Déterminez l'accélération horizontale du plan incliné.

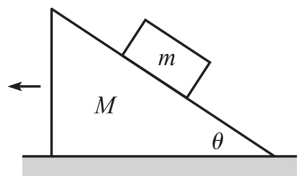

Figure 2

2 Résolution d'équations différentielles de base

Exercice 1

Une particule ponctuelle de masse m est soumise à une force $\mathbf{F}(t) = ma_0 \exp(-bt)\hat{\mathbf{x}}$. Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Déterminez $x(t)$.

Exercice 2

Une particule ponctuelle de masse m est soumise à une force $\mathbf{F}(v) = -bv^2\,\hat{\mathbf{x}}$. Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0$. Déterminez $x(t)$.

3 Mouvement d'un projectile

Exercice 1

Une particule ponctuelle de masse m est jetée en l'air avec une vitesse $\mathbf{v}$ à partir du niveau du sol (supposé horizontal). Quel est l'angle entre $\mathbf{v}$ et l'horizontale pour lequel l'aire sous la trajectoire est maximale ?

Exercice 2

Sur la planète Gravitus, un projectile est lancé à $t = 0$ avec une vitesse v_0 et un angle θ avec l'horizontale. La planète Gravitus a des propriétés physiques assez étranges : l'accélération de la pesanteur y augmente linéairement avec le temps, avec une valeur initiale nulle lorsque l'on lance le projectile ! En d'autres termes, on a $g(t) = \beta t$, où β est une constante donnée. Quelle distance horizontale le projectile parcourt-il ? Quel est l'angle θ qui maximise cette distance ?

Exercice 3

Un chasseur se situe à une distance horizontale ℓ d'un arbre, où un singe est suspendu à une branche située à une altitude h du sol. A l'instant $t = 0$, le chasseur tire avec son fusil sur le singe, en pointant son fusil directement vers le singe. Au même moment, le singe lâche la branche, pensant pouvoir éviter la balle. Le singe a-t'il raison ?

4 Mouvement dans un plan – coordonnées polaires

Exercice 1

Quelle est la vitesse par rapport au centre de la Terre d'un satellite se trouvant juste au-dessus de celle-ci et faisant un mouvement circulaire uniforme ? On donne $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ l'accélération de la pesanteur et $R = 6400\,\mathrm{km}$ le rayon de la Terre (supposée être sphérique).

Exercice 2

On considère une particule ponctuelle soumise à une force tangentielle $\mathbf{F} = m\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Montrez que $\dot{r} = \sqrt{A\ln r + B}$, où A et B sont des constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Exercice 3

(a) On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige inextensible et sans masse de longueur ℓ. Déterminez l'équation du mouvement et la résoudre dans la limite des petits angles et en prenant comme conditions initiales une vitesse nulle et un angle θ_0 par rapport à la verticale. Déterminez également la tension de la tige dans cette limite.

(b) On remplace la tige de la question précédente par un ressort de constante de raideur k et de longueur à l'équilibre r_0. Déterminez les équations du mouvement.