# Mécanique Analytique

L2 - Physique 2022-2023

*Paul-Antoine Hervieux*
*Unistra/IPCMS*

# 2) Principe de moindre action

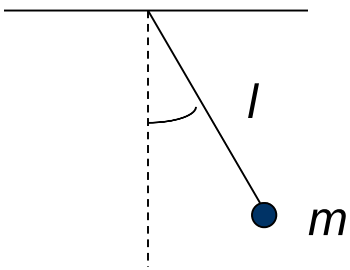
# Principe de moindre action

**1) Coordonnées généralisées**

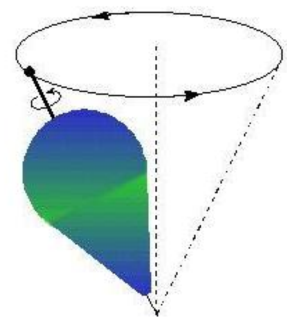
**Définition**: point matériel = corps dont on peut négliger les dimensions.

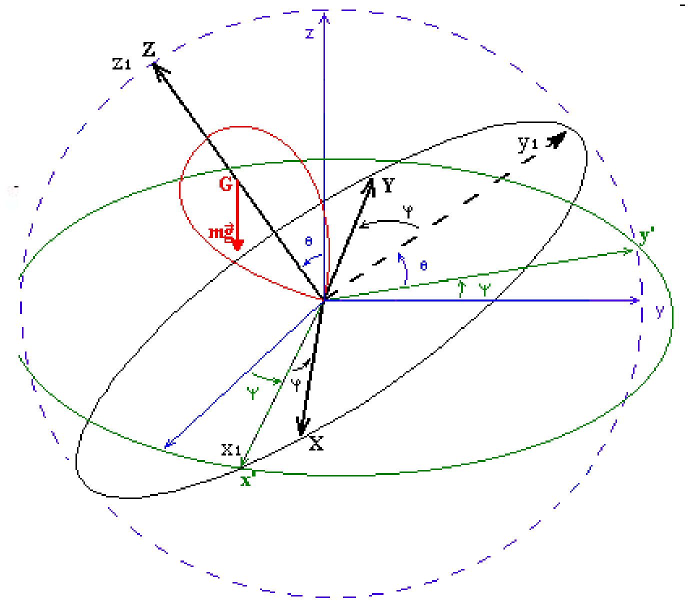
Ceci est à mettre en parallèle avec « la dynamique des **corps rigides** »

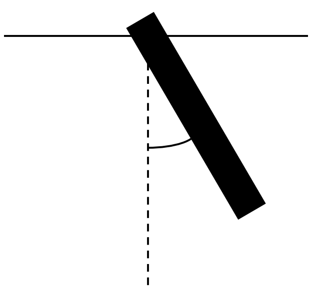
Angles d'**Euler**




point matériel





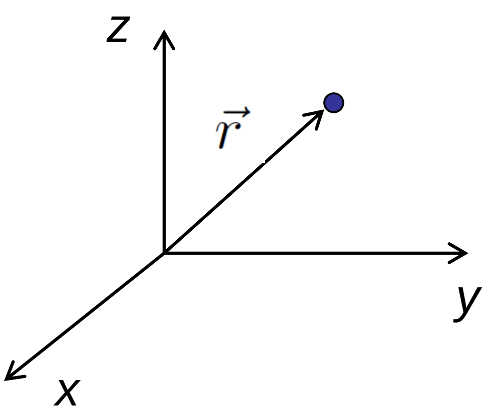



barre (solide rigide)

(tenseur d'inertie, torseur, …)

# Principe de moindre action

La position d'un point matériel dans l'espace → $\vec{r}$



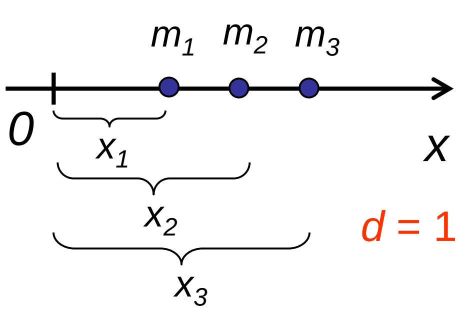

$$\vec{r}(x,y,z) \quad ; \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \quad ; \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$$

vitesse — accélération

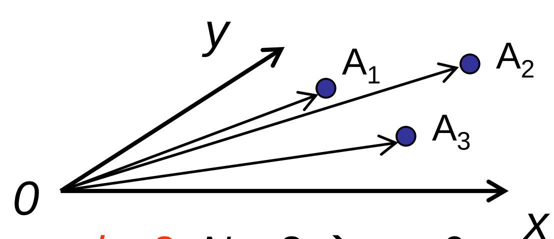
$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

**Définition**: le nombre de **grandeurs indépendantes** qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelé nombre ***s*** de **degrés de liberté** (DL) du système.

* pour *N* points matériels dans l'espace à *d* dimensions on a besoin de *N* rayons vecteurs c'est-à-dire *d* x *N* coordonnées → ***s*** = ***dN***




*d* = 1; *N* = 3 → ***s*** = 3




*d* = 2; *N* = 3 → ***s*** = 6

$$\vec{OA}_1 = (x_1, y_1); \vec{OA}_2 = (x_2, y_2); \vec{OA}_3 = (x_3, y_3)$$

# Principe de moindre action

Les DL ne sont pas forcément les coordonnées cartésiennes du point !

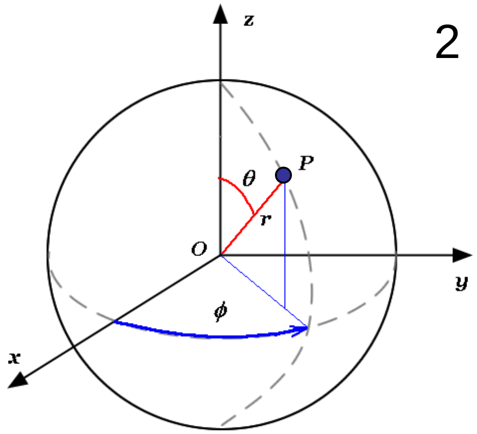
Il est souvent plus commode d'utiliser un autre système de coordonnées

$\Rightarrow q_1, q_2, \ldots q_s$ caractérisent complètement la position du système

Ce sont les **coordonnées généralisées** $\{q\}$

$\Rightarrow \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s$ Ce sont les **vitesses généralisées** $\{\dot{q}\}$

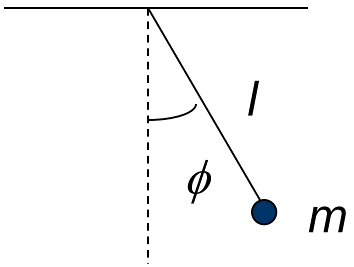
**Exemples**:




**a)** Point matériel qui se déplace sur une sphère de rayon *r*

2 DL → $s = 2$ → $(\theta,\phi)$ -pendule sphérique-

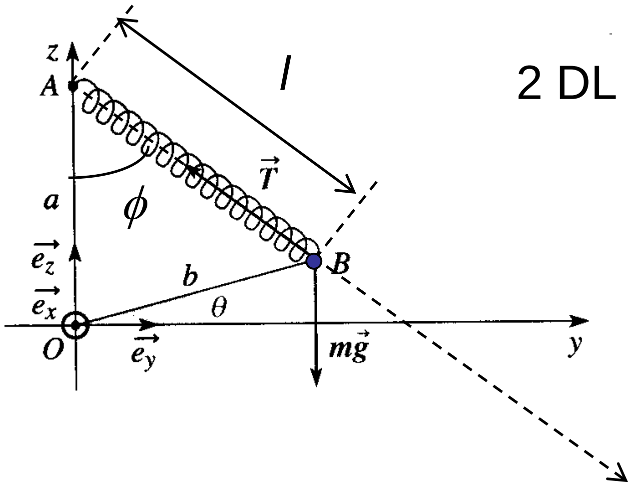
**b)** Pendule plan




1DL → $s = 1$ → $\phi$

# Principe de moindre action

c)

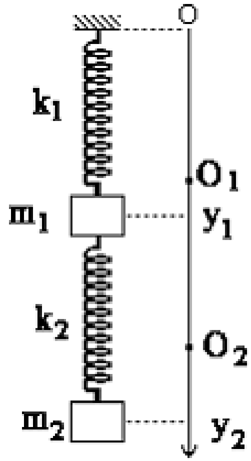



2 DL → $s$ = 2 → $\boxed{(l,\phi)}$ ou $(y_B, z_B)$

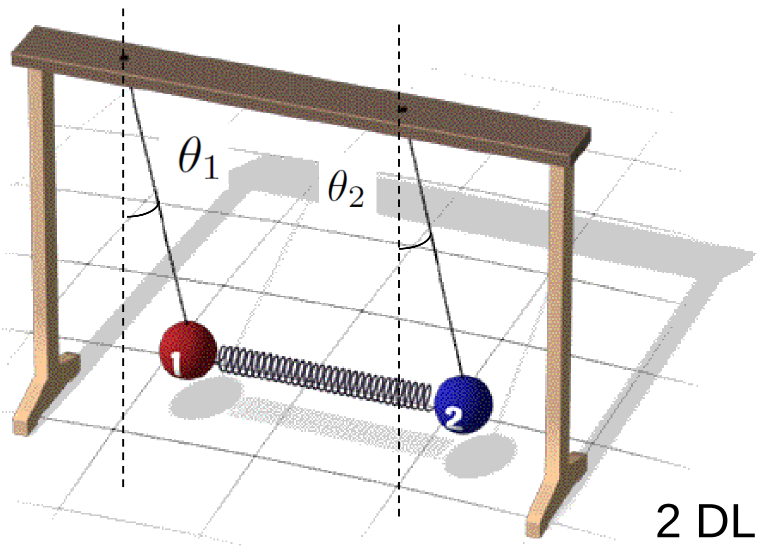
paramétrisation plus « physique »

e) Système masses-ressorts

2 DL → $s$ = 2 → $(y_1,y_2)$




d) Pendules plans couplés




2 DL → $s$ = 2 → $(\theta_1, \theta_2)$

# Principe de moindre action

L'expérience montre que: la connaissance **des coordonnées et des vitesses** détermine complètement l'état du système et permet de prédire son mouvement final.

**Définition**: les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées **équations du mouvement**.

Ce sont des équations différentielles du **second ordre**.

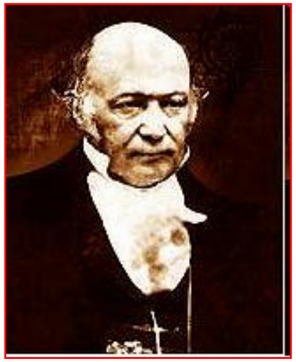
**Exemples**:

a) $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ 1 DL

b) $$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x \end{cases}$$ 2 DL

# Principe de moindre action

## 2) Le principe de moindre action



**(1805 – 1865)**

C'est le principe de **Hamilton**

Tout système mécanique est caractérisé par une fonction définie:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t) \equiv L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t)$$

Aux instants $t_1$ et $t_2$ le système occupe des positions déterminées $\{q^{(1)}\}$ et $\{q^{(2)}\}$
Entre ces deux instants, le système se meut de telle façon que l'intégrale

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t)dt}$$

ait la <u>plus petite valeur</u> possible.

*L*: fonction de **Lagrange** du système ou lagrangien* [L] = E

*S*: **action** du système [S] = E.T

* très important en théorie des champs (champ *em*); Physique statistique…

# Principe de moindre action

- *L* ne contient pas les dérivées supérieures $\{\ddot{q}\}, \{\dddot{q}\}, \ldots$

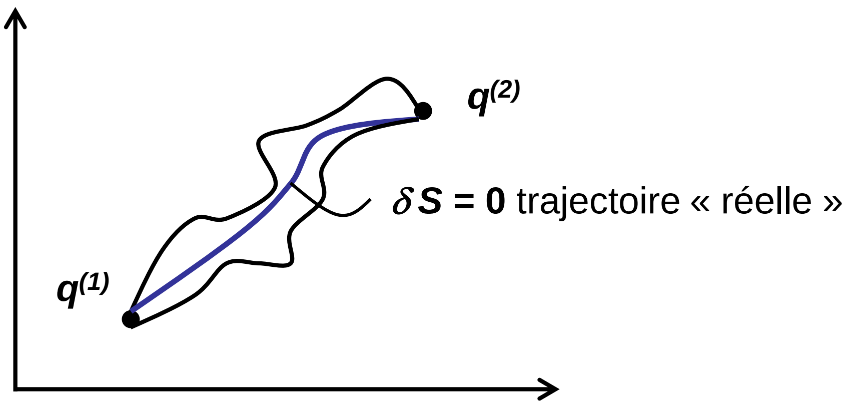
(*i.e*. le mouvement est complètement déterminé par les coordonnées et les vitesses)

En utilisant le calcul variationnel on obtient:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 & \text{1 DL} \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, s) & \boldsymbol{s}\text{ DL} \end{array}\right.$$

Ce sont les équations de **Lagrange**.

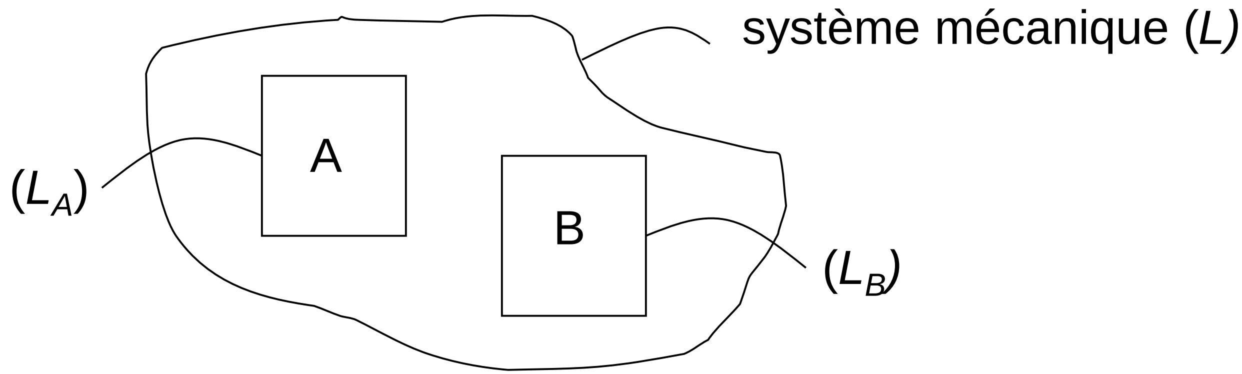
C'est un système de ***s*** équations différentielles du second ordre $\{\ddot{q}\}$
à ***s*** fonctions inconnues $q_i(t)$.



# Principe de moindre action

**Propriétés du lagrangien**

**a)**




- A et B sont deux parties fermées qui sont suffisamment éloignées pour ne pas interagir l'une avec l'autre → $\boxed{L = L_A + L_B}$

**b)** $L \rightarrow \alpha L \rightarrow$ les équations du mouvement ne changent pas.

**c)** La fonction de **Lagrange** n'est déterminée qu'à la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps près

$$\boxed{L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t)}$$

$$S' \equiv \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt \qquad \Rightarrow \delta S' = \delta S$$

$$= S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1)$$

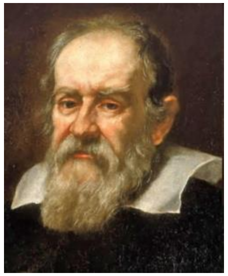
$\Rightarrow$ *L* et *L'* donnent les **mêmes équations du mouvement**

# Principe de moindre action

**Principe de relativité de Galilée**

**Définition**: Un système de référence est appelé galiléen (RG) si par rapport à lui, l'espace est **homogène** (*tous les points sont équivalents*) et **isotrope** (*toutes les directions sont équivalentes*) et le **temps uniforme** (*tous les instants sont équivalents*).

→ Dans un RG un corps libre et au repos à un instant donné restera au repos pendant un temps **illimité.**



(1564-1642)

On cherche la fonction de Lagrange d'un **point matériel libre**.

<u>Homogénéité</u> de l'espace → *L* ne dépend pas de $\vec{r}$
<u>Uniformité</u> du temps → *L* ne dépend pas de $t$
<u>Isotropie</u> de l'espace → *L* ne peut dépendre que de la <u>valeur absolue</u> de $\vec{v}$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$=0 (pas de force nette) $\boxed{\rightarrow L(v^2)}$

Equations de Lagrange → $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \mathrm{cte} \Rightarrow \vec{v} = \mathrm{cte}$ car $L(\vec{v}\cdot\vec{v})$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right)$$

# Principe de moindre action

**Principe de relativité de Galilée**

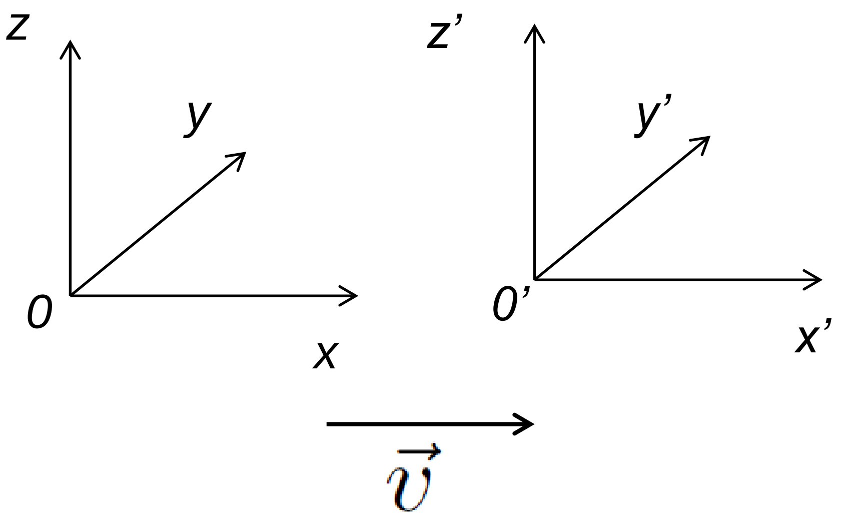
→ Dans un RG tout mouvement libre s'effectue avec une vitesse constante en grandeur et en direction. C'est la **loi de l'inertie.**

**Principe de relativité de Galilée** (un des principes les plus importants de la mécanique !)

Soient deux RG en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre. Dans ces systèmes les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes ainsi que toutes les lois de la mécanique

**Transformations de Galilée**

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} t' = t \\ \vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t \end{array}\right.}$$




**Les équations de Lagrange sont invariantes / à ces transformations**

# Principe de moindre action

**Fonction de Lagrange d'un système <u>fermé</u> de points matériels**

Soit un système de points matériels réagissant les uns sur les autres, mais **isolés** de tout corps étranger; on dit qu'un tel système qu'il est **fermé (isolé)**.

$$\boxed{L = \sum_a \frac{m v_a^2}{2} - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots) \equiv T - V}$$

*T* est **l'énergie cinétique** du système et *V* **l'énergie potentielle**

- *V* ne dépend que de la distribution des points matériels au même instant.
→ l'interaction se propage **instantanément** (uniquement vraie en RG / RR **Einstein**)

- Les équations de **Lagrange** sont **réversibles** dans le temps ( *t* → -*t* )

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \quad \rightarrow \quad \boxed{m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a}}$$

Équations de **Newton**

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a}$$

Force agissant sur le $a^{\text{ième}}$ point

# Principe de moindre action

**Lagrangien en coordonnées généralisées**

$$x_a = f_a(q_1, q_2, ..., q_s), \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - V \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik}(q)\dot{q}_i \dot{q}_k - V(q)$$

**Exemples**:

a) Coordonnées <u>cylindriques</u>

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, \varphi, z)$$

b) Coordonnées <u>sphériques</u>

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2\right) - V(r, \theta, \varphi)$$