L2

Mécanique Analytique

TD série 2: Principe de moindre action et formalisme lagrangien

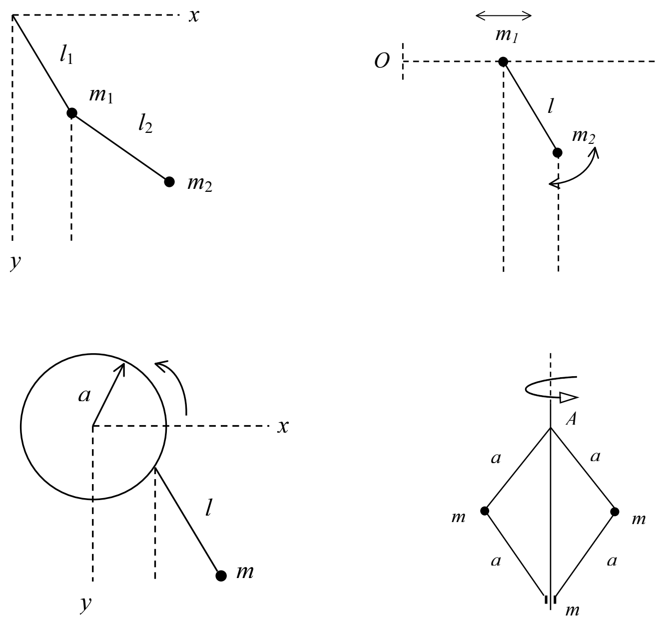

Figure 1:

1 Lagrangiens

Définir les coordonnées généralisées et trouver la fonction de Lagrange des systèmes suivants, placés dans un champ de pesanteur uniforme (accélération de la pesanteur: g).

1. Pendule double oscillant dans un plan (cf. Fig. 1 en haut à gauche).
2. Pendule plan de masse m_2 dont le point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sur une droite horizontale (cf. Fig. 1 en haut à droite).
3. Pendule plan de masse m dont le point de suspension se déplace uniformément sur un cercle vertical de rayon a avec une fréquence constante γ (cf. Fig. 1 en bas à gauche).
4. Le point m_2 se déplace sur l'axe vertical, et tout le système tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe (cf. Fig. 1 en bas à droite).

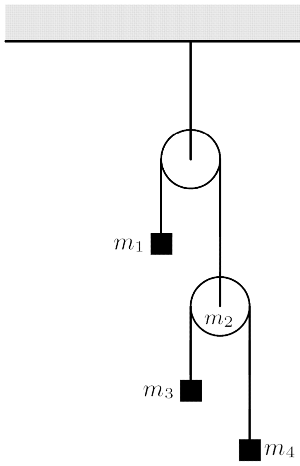

Figure 2:

2 Machine d'Atwood

Considérer le dispositif de double poulie, présenté sur la Fig. 2, soumis à la seule action de la pesanteur.

1. Donner les contraintes de ce système.
2. Ecrire le Lagrangien de ce système en choisissant les positions des masses m_1 et m_3 comme coordonnées généralisées.
3. Dériver les équations du mouvement de ces masses et déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3.

3 Variation 1 autour du pendule

Considérer (cf. Fig. 3) un pendule de centre O, de longueur l avec au bout une masse m. A cette dernière on attache un ressort de constante d'élasticité k et de longueur au repos d ($d < l$). L'autre extrémité du ressort est fixée au point P de l'axe vertical Oz, situé à une distance $2l$ du point O. Le système ne se déplace que dans le plan vertical et est soumis à la gravité. Ecrire le Lagrangien du système.

4 Variation 2 autour du pendule

Un pendule plan (cf. Fig.1 en haut à droite) de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la pesanteur. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x.

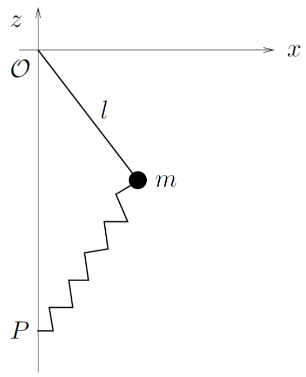

Figure 3:

1. Ecrire le Lagrangien de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ.

2. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement.

Considérer les conditions initiales $u(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\phi(0) = \alpha$,

- Utiliser une des constantes du mouvement pour éliminer $u(t)$ (exprimer $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$).

- Etablir l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faibles amplitudes.

- Trouver le $u(t)$ correspondant.

- Vérifier sous quelles conditions cette solution est valable.