TD 3
Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement

1 Conservation de l'énergie à une dimension

Exercice 1

(a) On considère une particule de masse m dans le champ de pesanteur terrestre. La particule est lâchée à l'instant $t = 0$ d'une hauteur h, avec une vitesse initiale nulle. Déterminez la trajectoire de la particule à partir de la conservation de l'énergie. (On négligera les frottements de l'air.)

(b) On considère un oscillateur harmonique à une dimension, d'énergie potentielle $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Déterminez $x(t)$ à partir de la conservation de l'énergie. On supposera que $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Exercice 2

Un wagon sur une rampe de montagne russe démarre d'une certaine hauteur h avec une vitesse initiale nulle. Le wagon rencontre une boucle circulaire de rayon R (voir Fig. 1). À quelle condition les occupants du wagon vont-ils survivre ? En d'autres termes, quelle doit être la hauteur h minimum telle que le wagon effectue une boucle complète sans quitter la piste ? On négligera les frottements.

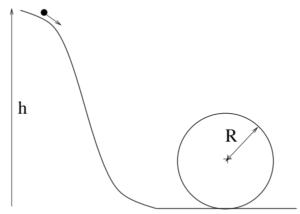

Figure 1

Exercice 3

Une particule ponctuelle de masse m se situe au sommet d'une sphère fixe de rayon R. On donne une pichenette infinitésimale à la particule afin qu'elle commence à rouler le long de la sphère. À quel endroit la particule va-t'elle ne plus être en contact avec la sphère ? On négligera le frottement entre la masse ponctuelle et la sphère.

2 Petites oscillations

Exercice 1

Une masse ponctuelle m dans le champ de gravitation est accrochée à un ressort de constante de raideur k. Soit y la coordonnée verticale de la particule ; $y = 0$ correspond à la longueur d'équilibre du ressort lorsqu'aucune masse n'y est accrochée.

(a) Écrire l'énergie potentielle du système.

(b) Quelle est la position d'équilibre y_0 de la masse ponctuelle ?

(c) Déterminez la fréquence ω des petites oscillations autour de y_0.

Exercice 2

Une masse ponctuelle de masse m est soumise à un potentiel $V(x) = \alpha x^4/4 + \beta x^3/3$, avec $\alpha > 0$. Déterminez la fréquence des petites oscillations autour de l'équilibre. Commentez le cas $\beta = 0$.

3 Quantité de mouvement

Une fusée démarre du repos avec une masse initiale M et éjecte ses gaz avec une vitesse u par rapport au référentiel de la fusée. On appelle m la masse de la fusée à un instant ultérieur.

(a) (Re)-démontrez que la vitesse de la fusée est donnée par $v = u \ln(M/m)$.

(b) Quelle est la masse de la fusée lorsque sa quantité de mouvement est maximale ?

(c) Quelle est la masse de la fusée lorsque son énergie est maximale ?

(d) Supposons qu'il soit structurellement impossible de construire un réservoir de fusée qui puisse contenir plus de neuf fois la masse à vide de la fusée. D'après la question (a), on aurait alors $v_{\text{max}} = u \ln 10$. Montrez que pour une même masse de carburant, il est avantageux pour que la fusée aille plus vite que celle-ci soit constituée de différents étages.

4 Chocs de particules

Exercice 1

Considérons la collision élastique unidimensionnelle suivante : une masse $2m$ se déplaçant vers la droite et une masse m se déplaçant vers la gauche, toutes deux à la vitesse v par rapport au référentiel du laboratoire. Déterminez les vitesses des deux particules après le choc dans le référentiel du laboratoire (i) en travaillant dans ce dernier et (ii) en utilisant le référentiel du centre de masse.

Exercice 2

(a) Une boule de billard de masse m et de vitesse $\mathbf{v}$ s'entrechoque élastiquement avec une boule identique initialement au repos. Soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vitesses des deux trajectoires résultantes. Montrez, en utilisant les propriétés du produit scalaire, que l'angle entre les deux trajectoires après le choc est $\pi/2$.

(b) La boule de billard statique a maintenant une masse $2m$. Montrez que la vitesse $\mathbf{v}_2$ de la masse $2m$ après le choc doit être perpendiculaire à $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, avec $\mathbf{v}_1$ la vitesse de la masse m après le choc.

Exercice 3

Une boule de billard ayant une vitesse initiale v est dirigée vers deux autres boules de billard au repos et identiques à la première, selon la situation parfaitement symétrique de la Fig. 2. Déterminez les vitesses des trois boules après le choc élastique, en supposant que les deux boules de droites ont la même vitesse.

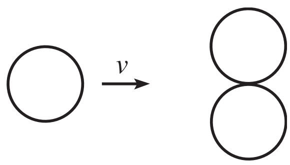

Figure 2

Exercice 4

Une masse ponctuelle M rentre en collision (supposée élastique) avec une masse m initialement au repos. On suppose que $M > m$. Montrez que l'angle maximale de déflection de M est donné par $\theta_{\text{max}} = \arcsin(m/M)$. On pourra soit travailler dans le référentiel du laboratoire, soit dans le référentiel du centre de masse (ce qui donne une solution au problème beaucoup plus facile et élégante).

Figures du TD : © D. Morin & F. Thalmann