# Mécanique Analytique

L2 - Physique 2022-2023

*Paul-Antoine Hervieux*
*Unistra/IPCMS*

# 3) Lois de conservation

# Mécanique Analytique

*À toute <u>transformation infinitésimale</u> qui laisse invariante l'intégrale d'action correspond une grandeur qui se conserve !*

Soient $q_i^{(s)}$ des coordonnées généralisées qui dépendent continûment d'un paramètre $s$. Si le lagrangien $L$ est indépendant de $s$ c'est-à-dire $L(q_i^{(s)}, \dot{q}_i^{(s)}, t) = L(q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)}, t)$ alors : $I(q_i, \dot{q}_i) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i^{(s)}}{ds}\right|_{s=0}$ est une intégrale première.

## Théorème de Noether

Symétries d'espace-temps, dites « **externes** »
→ Translations d'espace et de temps, rotation d'espace

**Rq**: Il existe aussi des symétries dites « **internes** » (jauge)

# Lois de conservation

**Définition:** Lorsqu'un système mécanique est en mouvement les 2*s* grandeurs $q_i$ et $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, ..., s)$ varient avec le temps. Il existe des fonctions de ces

grandeurs qui conservent pendant le mouvement une **valeur constante** dépendant seulement des conditions initiales (CI). Ces fonctions sont appelées:

- **Intégrales premières**
- **Intégrales du mouvement**
- **Constantes du mouvement**

.

Notre but sera de les trouver !

**Propriété:** Ces grandeurs sont **additives.** Pour un système formé de particules indépendantes leur valeur est égale à la **somme** de leurs valeurs pour chacune des particules.

# Lois de conservation

## 1) Energie

Cette loi de conservation découle de **l'uniformité du temps**

Uniformité du temps → *L* ne dépend pas **explicitement** du temps $L\left(\{q\},\{\dot{q}\}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$$

$$\text{Equations de Lagrange} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L\right) = 0$$

$$\boxed{E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{constante}\ \forall t}$$

# Lois de conservation

## 1) Energie

- Ceci n'est vrai que pour un système **fermé !**
- Cette grandeur (*E*) est appelée **énergie du système**
- Ceci est aussi valable pour les systèmes placés dans **un champ extérieur constant** (qui ne dépend pas du temps)
- Ces systèmes sont appelés **conservatifs**

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

*T* est une **fonction homogène** pour les vitesses généralisées

$$\Leftrightarrow T(q, \alpha\dot{q}) = \alpha^k T(q, \dot{q}) \text{ avec } k = 2 \text{ (degré 2)}$$

On peut appliquer le théorème d'**Euler**

$$\Rightarrow \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - L = T + V}$$

(*V* ne dépend pas des vitesses par hypothèse)

# Lois de conservation

### 1) Energie

L'énergie d'un système **fermé** peut-être représentée sous la forme d'une somme: **l'énergie cinétique** dépendant des vitesses et **l'énergie potentielle** dépendant des coordonnées des points matériels. ***E = T + V***

### 2) Impulsion

**L'homogénéité de l'espace** donne lieu à une autre loi de conservation

Les propriétés mécaniques d'un système mécanique **fermé** ne changent pas lors d'un **déplacement parallèle** du système entier dans l'espace

→ Le lagrangien reste inchangé

**Déplacement parallèle**: tous les points du système se déplacent d'un même segment

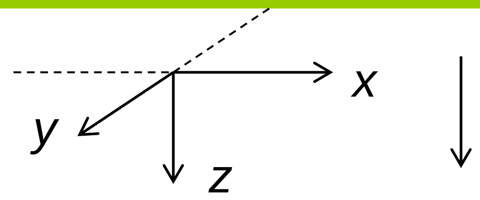
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_a \quad &\longrightarrow \quad \vec{r}_a + \vec{\epsilon} \\ &\longrightarrow \quad \vec{r}_a + \delta\vec{r}_a \end{aligned}}$$

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \cdot \delta\vec{r}_a = \vec{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$$

$$(\text{les vitesses sont constantes} \Rightarrow \delta\vec{v}_a = \vec{0})$$

# Lois de conservation

## 2) Impulsion




$$\forall\vec{\epsilon}\ \delta L = 0 \Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{0}$$

Avec les équations de **Lagrange**: $\sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = \vec{0}$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\right)$$

→ La grandeur vectorielle $\boxed{\vec{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}}$ reste inchangée lors du mouvement

$\vec{P}$ est **l'impulsion** du système

Avec $L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots) \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a \equiv \sum_a \vec{p}_a}$

$\vec{p}_a$ sont les impulsions individuelles

**Rq**: - Cette loi de conservation n'est valable pour les **trois** composantes du vecteur impulsion qu'en **l'absence** de champ extérieur.

- Dans un champ uniforme dirigé suivant l'axe (*Oz*) il y a conservation des composantes de l'impulsion le long des axes (*Ox*) et (*Oy*).

# Lois de conservation

**2) Impulsion**

On a vu que $\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_a \vec{F}_a = \vec{0}$

$(\text{on a utilisé } \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a})$

→ La somme des forces agissant sur toutes les particules d'un système fermé est égale à zéro

**Forces généralisées**

On définit: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ **impulsions généralisées**

$F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i}$ **forces généralisées**

Les équations de **Lagrange** deviennent: $\boxed{\dot{p}_i = F_i}$

Les $p_i$ sont des fonctions homogènes linéaires (degré 1) des $\dot{q}_i$

# Lois de conservation

### 3) Moment cinétique

Cette loi de conservation est liée à **l'isotropie de l'espace**

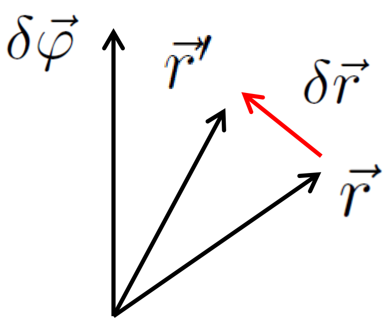
Les propriétés mécaniques ne changent pas lors d'une **rotation** dans l'espace du système dans son ensemble.

→ Le lagrangien reste inchangé

Soit $\boxed{\delta\vec{\varphi}}$ un vecteur de rotation infinitésimal → $\begin{cases} \delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r} \\ \delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{v} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\delta \vec{r}_a} \cdot \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\delta \vec{v}_a} \cdot \delta \vec{v}_a \right) \\ &= \sum_a \left( \dot{\vec{p}}_a \cdot (\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_a) + \vec{p}_a \cdot (\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{v}_a) \right) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_a = \dot{\vec{p}}_a \right)$$



# Lois de conservation

**3) Moment cinétique**

$$\Rightarrow \delta\vec{\varphi} \cdot \sum_a \left(\vec{r}_a \wedge \dot{\vec{p}}_a + \vec{v}_a \wedge \vec{p}_a\right) = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a = 0$$

**Rq**: On a utilisé le fait que le produit mixte reste inchangé par permutation circulaire des 3 vecteurs $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a\right) &= 0 \quad \text{vrai} \quad \forall \delta\vec{\varphi} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a\right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{M} = \sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a$ est une grandeur conservée

$\vec{M}$ est appelé **moment cinétique** du système

# Lois de conservation

Pour un système **fermé** il y a **7** intégrales premières

$$(E, \vec{P}, \vec{M})$$

# Lois de conservation

## 4) Théorème du viriel

**Viriel** du latin *vis* (force) Rudolf **Clausius** en 1870.

Si le mouvement d'un système dont l'énergie potentielle est une **fonction homogène des coordonnées** s'effectue dans une **région limitée de l'espace**, il existe une relation très simple entre les valeurs moyennes dans le temps des énergies potentielle et cinétique; cette relation est connue sous le nom de **théorème du viriel**.

*T* est une fonction homogène de degré 2 dans les vitesses → $\sum_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} \cdot \vec{v}_a = 2T$

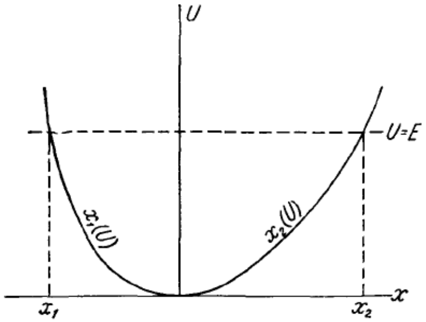
En utilisant $\frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} = \vec{p}_a$ on obtient

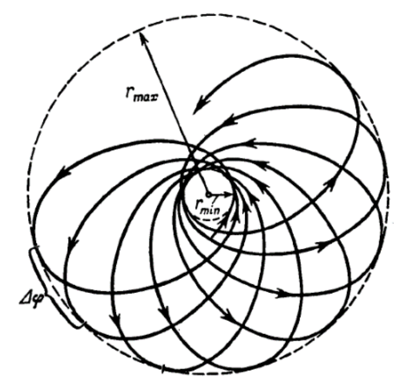
$$2T = \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a\right) - \sum_a \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a$$

Prenons la **moyenne temporelle** de cette égalité.

**Définition**:

$$\boxed{\bar{f} = lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt}$$



# Lois de conservation

### 4) Théorème du viriel

Si $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ où $F(t)$ est une fonction <u>bornée</u> alors

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0$$

Par hypothèse le mouvement s'effectue dans une **région limitée de l'espace**

→ $\left(\sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a\right)$ est une fonction bornée

En utilisant $\dot{\vec{p}}_a = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a}$ → $\boxed{2\bar{T} = \sum_a \vec{r}_a \cdot \overline{\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a}}}$

Si l'énergie potentielle est une fonction de degré ***k*** de tous les rayons vecteurs $\vec{r}_a$

$V(\alpha\vec{r}_a) = \alpha^k V(\vec{r}_a)$ → on peut utiliser le théorème d'**Euler** → $\sum_a \vec{r}_a \cdot \overline{\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a}} = k\bar{V}$

$$\boxed{2\bar{T} = k\bar{V}}$$

# Lois de conservation

**4) Théorème du viriel**

$$\bar{T} + \bar{V} = \bar{E} = E \Longrightarrow \boxed{\bar{V} = \frac{2}{k+2} E \;;\; \bar{T} = \frac{k}{k+2} E}$$

**Deux exemples importants**:

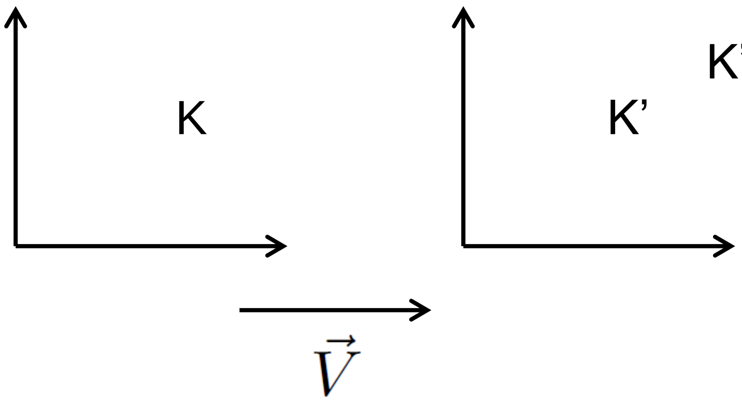
- $k = 2$ oscillateur harmonique $\bar{T} = \bar{V}$
- $k = -1$ interaction gravitationnelle et coulombienne $2\bar{T} = -\bar{V}$

# Lois de conservation

## 5) Centre d’inertie

L’impulsion d’un système mécanique **fermé** a des valeurs différentes dans différents systèmes de référence galiléens.

K’ se meut avec une vitesse $\vec{V}$ par rapport à K




$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V} \Rightarrow \vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \vec{V} \sum_a m_a$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{P}' + \mu \vec{V} \quad \text{avec} \quad \mu = \sum_a m_a$$

Il existe **toujours** un repère K’ tel que: $\vec{P}' = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\mu} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a}}$

# Lois de conservation

**5) Centre d'inertie**

$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\mu}$ est la vitesse du système dans son ensemble (vitesse du ***cdm***)

$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ avec $\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}$ (position du ***cdm***)

- Le ***cdm*** d'un système fermé est animé d'un mouvement **rectiligne** et **uniforme**

$$\Leftrightarrow \vec{P} = c\vec{te}$$

- Pour un système fermé, il est naturel d'utiliser pour **système de référence** celui dans lequel son ***cdm*** est au repos.

- L'énergie d'un système mécanique au **repos dans son ensemble** est appelée son **énergie interne.**

$$\boxed{E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{int}}}$$