L2

Mécanique analytique et systèmes dynamiques

TD série 3: Lois de conservation et équations canoniques

1 Particule dans un cône

Dans le cas d'un point matériel se déplaçant dans un cône d'ouverture 2θ, on se propose de traiter la contrainte à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

1. Ecrire le lagrangien L_0 de ce système en coordonnées cylindriques (sans tenir compte de la contrainte).
2. Ecrire la contrainte sous la forme: $f(r, \phi, z) = 0$.
3. Considérer $L = L_0 + \lambda f(r, \phi, z)$ comme nouveau lagrangien avec les coordonnées (r, ϕ, z, λ) et établir les équations de Lagrange.
4. Trouver les constantes du mouvement.
5. A l'aide des équations du mouvement, trouver λ en fonction des coordonnées.
6. Exprimer la force de soutien agissant sur le point matériel.

2 Recherche des invariants

Indiquer les composantes de l'impulsion $\vec{P}$ et du moment cinétique $\vec{M}$ qui se conservent lors d'un mouvement dans les champs suivants:

1. Champ d'un plan homogène infini (le plan infini étant le plan xy).
2. Champ d'un cylindre homogène infini (axe du cylindre: z).
3. Champ d'un prisme homogène infini (arêtes du prisme parallèles à l'axe z).
4. Champ de deux points (les points sont situés sur l'axe z).
5. Champ d'un demi-plan homogène infini (le demi-plan infini étant la partie du plan xy limitée par l'axe y).
6. Champ d'un cône homogène (axe du cône: z).
7. Champ d'un tore circulaire homogène (axe du tore: z).
8. Champ d'une hélice cylindrique homogène infinie.

3 Transformation de Legendre: $L \to H$

1. Pendule en rotation ($r = R =$ const et $\dot{\varphi} = \omega =$ const)

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta$$

2. Pendule sphérique ($r = R =$ const)

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta$$

3. Système de ressorts

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2)$$

4. Pendule en déplacement

$$L(u, \varphi, \dot{u}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{u} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + m_2 g l \cos(\varphi)$$