Contrôle continu n° 1

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

On considère le système de la Fig. 1 ci-dessous : un disque de rayon r et de masse m placé entre deux cerceaux de rayon R. Dans tout le problème, on néglige la friction. On appelle σ la densité de masse surfacique du disque de rayon r, et θ correspond à l'angle de contact disque–cerceaux par rapport à l'horizontale. Le système est placé dans un champ de gravitation, d'accélération de la pesanteur g.

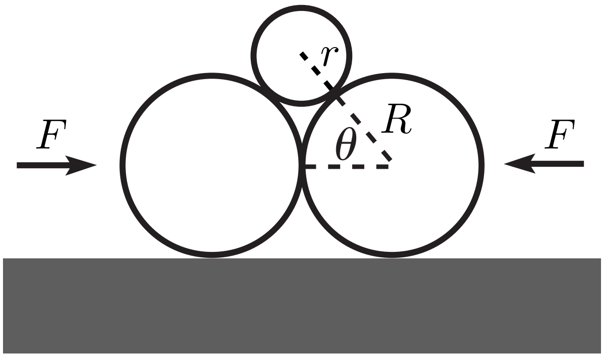

Figure 1

(a) Montrez que les rayons r et R sont reliés par l'expression

$$r = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right).$$

(b) Calculez la force F horizontale qu'il faut appliquer au système afin que les deux cerceaux restent en contact. Vous exprimerez votre résultat en fonction de σ, g, R et θ.

(c) Quelles sont les valeurs de F dans les deux cas limites $\theta \to 0$ et $\theta \to \pi/2$? Commentez vos résultats.

Exercice 2

On considère un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale, sur lequel repose une masse M, reliée *via* une corde inextensible et de masse nulle, à une autre masse m, à l'aide d'une poulie, dont on néglige la masse (voir Fig. 2). On appelle μ le coefficient de friction cinétique entre M et le plan incliné, et g l'accélération de la pesanteur. Dans la suite, on suppose que M est suffisamment grande afin que m monte vers le haut.

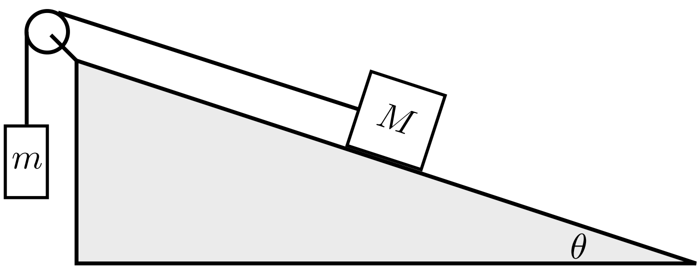

Figure 2

(a) Déterminez l'accélération a des deux masses en fonction de m, M, g, θ, et μ. Vous préciserez sur un schéma la direction de toutes les forces en jeu.

(b) Montrez que la tension T dans la corde a pour expression

$$T = \frac{mMg(1 + \sin\theta - \mu\cos\theta)}{m + M}.$$

Exercice 3

Le potentiel de Lennard–Jones a pour expression

$$V(x) = 4\,\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right], \qquad x > 0,$$

où $\varepsilon > 0$ à la dimension d'une énergie et $\sigma > 0$ d'une longueur.

(a) Esquissez $V(x)$ en fonction de x.

(b) Déterminez le minimum (global) x_0 de $V(x)$.

(c) Déterminez la fréquence des petites oscillations ω d'une particule ponctuelle de masse m autour de x_0.