TD 4
Dynamique du solide indéformable

1 Centre de masse

Déterminez le centre de masse des objets suivants :

(a) une tige de longueur L, de densité de masse linéique $\lambda(x) = \alpha x$, où α est une constante (quelle est sa dimension ?) et où l'origine des coordonnées est prise à l'une des extrémités de la tige ;

(b) un hémisphère creux de rayon R et de densité surfacique de masse uniforme σ.

2 Moment d'inertie

Exercice 1

Calculez le moment d'inertie autour d'un axe spécifique des objets de masse M suivants. On supposera que la densité de masse (par unité de longueur, d'aire, ou de volume selon les cas) est uniforme.

(a) Carré de côté a [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan].

(b) Rectangle de grand côté b et de petit côté c [axe passant par le centre, perp. au plan].

(c) Anneau de rayon R [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan, Fig. 1(i)].

(d) Anneau de rayon R [axe passant par le centre, dans le plan, Fig. 1(i)].

(e) Disque de rayon R [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan, Fig. 1(ii)].

(f) Disque de rayon R [axe passant par le centre, dans le plan, Fig. 1(ii)].

(g) Sphère creuse de rayon R [axe passant par le centre].

(h) Sphère pleine de rayon R [axe passant par le centre].

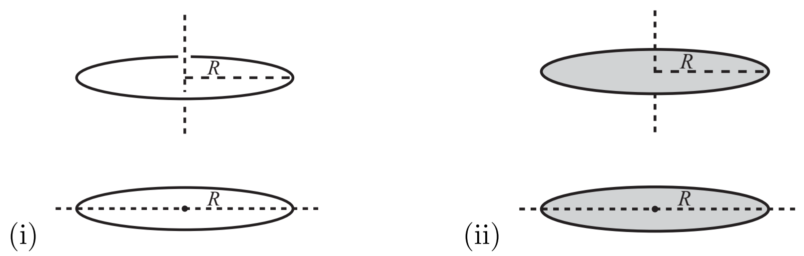

Figure 1

Exercice 2

Considérons la machine d'Atwood de la Fig. 2. Les masses ponctuelles sont m et $2m$, et la poulie est un disque uniforme de masse m, de rayon R, et de moment d'inertie $I = mR^2/2$ par rapport à son axe de rotation [cf. Exercice 1(e) ci-dessus]. On néglige le poids de la corde reliant les deux masses ponctuelles, et on suppose que la corde ne glisse pas sur la poulie. Déterminez la vitesse et l'accélération des deux masses suspendues. *Indication :* utilisez la conservation de l'énergie.

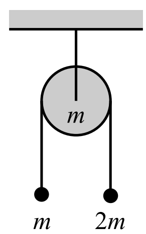

Figure 2

Exercice 3

Une boule de masse m, de rayon R_b, et de moment d'inertie $\beta m R_\mathrm{b}^2$ où β est une constante (positive, bien sûr), se situe au sommet d'une sphère fixe (rayon R). On donne une pichenette infinitésimale à la boule afin qu'elle commence à rouler sur la sphère. On cherche à déterminer l'endroit où la boule quitte la sphère.

(a) Résoudre ce problème en considérant tout d'abord que la boule est une masse ponctuelle, $R_\mathrm{b} \to 0$. On négligera le frottement entre la masse ponctuelle et la sphère. *Indication :* nous avons déjà résolu ce problème au TD 3 !

(b) Considérez maintenant que la boule a un rayon fini, que l'on supposera beaucoup plus petit que le rayon de la sphère, $R_\mathrm{b} \ll R$. On supposera que la boule roule sans glisser sur la sphère. Discutez les cas limites $\beta \to 0$, $\beta = 2/5$ [cas d'une sphère uniforme, cf. Exercice 1(h) ci-dessus], et $\beta \to \infty$.

(c) Comment la réponse à la question précédente change-t-elle lorsque R_b devient comparable ou plus grand que R ?

Exercice 4

Une échelle (supposée unidimensionnelle) de longueur l et de densité de masse linéique uniforme λ repose contre un mur. On néglige la friction entre l'échelle et le mur, et entre le sol et l'échelle. L'échelle est lâchée du repos alors que son extrémité inférieure se situe à une distance infinitésimale du mur. L'extrémité supérieure de l'échelle glisse alors le long du mur, alors que son extrémité inférieure glisse sur le sol (voir Fig. 3).

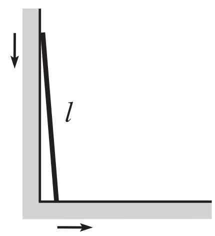

FIGURE 3

(a) Soit $r = l/2$. Montrez que tant que l'échelle est en contact avec le mur, son centre de masse décrit une trajectoire circulaire de rayon r.

(b) Calculez le moment d'inertie I_CM de l'échelle par rapport à l'axe de rotation passant par son centre de masse. Exprimez votre résultat en fonction de r et de m, la masse totale de l'échelle.

(c) Déterminez la vitesse linéaire v du centre de masse de l'échelle tant que celle-ci est en contact avec le mur en fonction de l'angle θ que fait l'échelle avec la verticale.

(d) Quelle est la vitesse horizontale du centre de masse de l'échelle au moment où celle-ci perd contact avec le mur ?

Exercice 5

Une tige de longueur L et de densité de masse uniforme est initialement positionnée à la verticale, alors que son extrémité inférieure est tenu par un pivot. On donne alors une pichenette infinitésimale à la tige, de sorte que cette dernière se met en mouvement autour du pivot. Après 3/4 de tour (cf. Fig. 4), le pivot se désintègre, et la tige poursuit son mouvement dans les airs. Quelle est la hauteur maximale que le centre de masse de la tige va atteindre ? Lorsque la tige atteind ce point, quel est l'angle que celle-ci forme avec l'horizontale ?

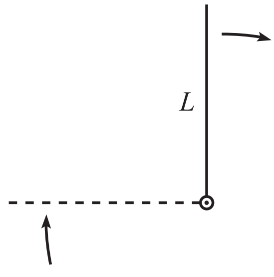

FIGURE 4

3 Moment d'une force – couple

Exercice 1

Une tige sans masse et de longueur L est reliée à l'une de ses extrémités à un pivot et à l'autre extrémité à une masse ponctuelle m (voir Fig. 5). Où doit-on attacher une seconde masse à la tige de telle sorte que cette dernière tombe le plus rapidement possible ?

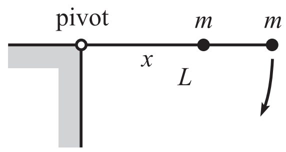

FIGURE 5

Exercice 2

Une tige sans masse de longueur b a l'une de ses extrémités reliée par un pivot à un support, et l'autre collée perpendiculairement au milieu d'une tige homogène de masse m et de longueur l.

(a) Si les deux tiges sont toutes deux maintenues à l'horizontale (voir Fig. 6 du haut) et ensuite relachées, quelle est l'accélération initiale du centre de masse ?

(b) Pour la même situation que la question (a), déterminez l'équation du mouvement. Que peut-on dire des cas limites ?

(c) Si les deux tiges sont toutes deux maintenues dans le plan vertical (voir Fig. 6 du bas) et ensuite relachées, quelle est l'accélération initiale du centre de masse ?

(d) Pour la même situation que la question (c), déterminez l'équation du mouvement. Que peut-on dire des cas limites ?

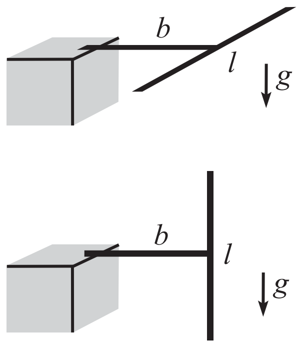

FIGURE 6

Exercice 3

Reprendre l'Exercice 2 de la Section 2 ci-dessus (machine de Atwood), en utilisant cette fois-ci les notions de force et de couple, et non pas la conservation de l'énergie.

Exercice 4

Une petite bille de rayon R_{b}, de masse m et de densité de masse uniforme roule sans glisser près du fond d'un half-pipe de rayon R (voir Fig. 7). Quelle est la fréquence des oscillations de la bille ? On supposera que $R_{\mathrm{b}} \ll R$.

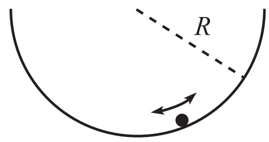

FIGURE 7

4 Collisions

Exercice 1

Une balle (supposée ponctuelle) de masse M en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse V_0 se dirige perpendiculairement vers une tige uniforme initialement au repos de longueur l, de masse m, et de moment d'inertie par rapport au centre de masse $I = \beta m l^2$, avec β une constante positive. La balle percute la tige à une distance d de son centre de masse (voir Fig. 8) et le choc est supposé élastique. Déterminez les vitesses de translation et de rotation de la tige après le choc, ainsi que la vitesse de la balle résultante.

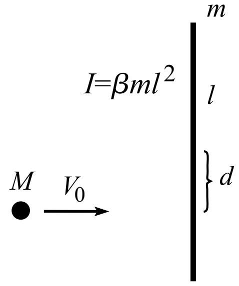

FIGURE 8

Exercice 2

Une tige uniforme de masse m et de longueur l a l'une de ses extrémités attachée à un pivot. La tige est initialement maintenue à l'horizontale. On relâche alors la tige, et lorsque celle-ci se retrouve en position verticale, l'autre extrémité libre de la tige percute une balle, supposée ponctuelle. (On supposera que la balle est initialement au repos, et que le choc est élastique). Si la tige perd dans la collision la moitié de sa vitesse angulaire, quelle est la masse M de la balle ? Quelle est la vitesse de la balle immédiatement après la collision ?

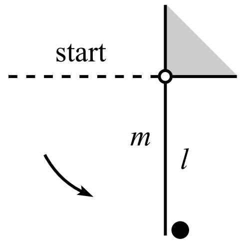

Figure 9

Figures du TD : © D. Morin