TD 5
Notions de mécanique analytique

Exercice 1

Un pendule est constitué d'une masse m ponctuelle et d'une tige rigide de longueur l. Le support du pendule oscille horizontalement, avec une position donnée par $x_s(t) = x_0 \cos(\omega t)$ (voir Fig. 1). On cherche dans cet exercice à déterminer l'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec la verticale.

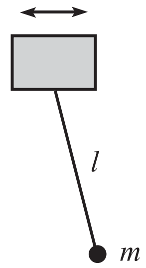

Figure 1

(a) Écrire le lagrangien du système.

(b) En déduire l'équation du mouvement.

(c) Résoudre cette équation dans la limite $\theta \ll 1$. On posera comme conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Exercice 2

Un bloc de masse m est maintenu immobile sur un plan incliné de masse M et d'angle d'inclinaison θ (voir Fig. 2). Le plan incliné est initialement au repos sur une surface horizontale. Dans la suite, on néglige toutes forces de friction entre le bloc et le plan incliné, et le plan incliné et la surface horizontale. On lâche alors le bloc. On cherche dans cet exercice à déterminer l'accélération horizontale du plan incliné.

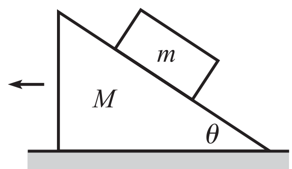

Figure 2

(a) Soient x_1 la coordonnée horizontale du plan incliné (avec $x_1 > 0$ vers la gauche) et x_2 la coordonnée horizontale du bloc (avec $x_2 > 0$ vers la droite). Montrez que la distance verticale dont tombe le bloc est $(x_1 + x_2)\tan\theta$.

(b) Déterminez l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système total (bloc + plan incliné). En déduire le lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

(c) À l'aide des équations d'Euler–Lagrange, déterminez les équations du mouvement du système.

(d) En déduire l'accélération horizontale $\ddot{x}_1$ du plan incliné.

(e) Pour m et M donnés, quel est l'angle θ_0 qui maximise $\ddot{x}_1$? Discutez les cas limites $m \ll M$ et $m \gg M$.

Exercice 3

Deux tiges sans masse de longueur $2r$, chacune ayant une masse m fixée en leurs milieux, sont reliées par un bras articulé. L'une des tiges se situe au-dessus de l'autre, comme le montre la Fig. 3. La tige du dessous est elle-même reliée au sol par un bras articulé. Les deux tiges sont maintenues de telle sorte que la tige du bas soit verticale, alors que celle du haut forme un angle ε avec la verticale. Les tiges sont alors lâchées. À cet instant, on cherche à déterminer les accélérations angulaires des deux tiges. On se placera dans la limite où $\varepsilon \ll 1$.

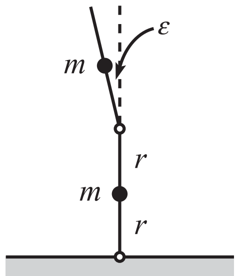

Figure 3

(a) Soient θ_1 (θ_2) l'angle que forme la tige du bas (du haut) avec la verticale juste après le lâcher. Déterminez les positions (en coordonnées cartésiennes) des deux masses.

(b) En déduire l'énergie potentielle du système.

(c) Quelle est l'énergie cinétique de la masse du bas ? Du haut ?

(d) En supposant que $\theta_1 \ll 1$ et $\theta_2 \ll 1$, montrez que le lagrangien du système s'écrit

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}mr^2\left(5\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mgr\left(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right).$$

(e) Écrire les équations du mouvement et en déduire $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$ juste après le lâcher.