Contrôle continu n° 2

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h 30
Le sujet comprend 3 pages au total

Exercice 1 : Machine d'Atwood

Considérons la machine d'Atwood de la Fig. 1. Les masses ponctuelles sont m et $2m$, et la poulie est un disque uniforme de masse m, de rayon R, et de moment d'inertie $I = mR^2/2$ par rapport à son axe de rotation. On néglige le poids de la corde reliant les deux masses ponctuelles, et on suppose que la corde ne glisse pas sur la poulie. Déterminez l'accélération a des deux masses suspendues en utilisant la notion de force et de couple.

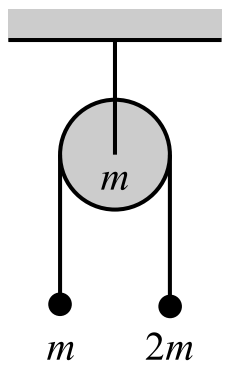

Figure 1

Exercice 2 : Collision élastique

On considère la collision élastique à deux dimensions suivante : une particule (supposée ponctuelle) de masse m se meut avec une vitesse v_0 dans la direction x vers une particule de masse nm (elle aussi supposée ponctuelle), où n est un nombre réel positif, et initialement au repos. Le système formé par les deux masses est isolé de toute force extérieure. Soient $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ et $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ les vecteurs vitesse des particules de masse m et nm après la collision, respectivement, décomposés selon leur composantes cartésiennes selon x et y.

Après la collision, il est observé que les deux masses ont la même vitesse selon x, c'est-à-dire que $v_x = V_x$. Quel est alors l'angle que fait le vecteur vitesse $\mathbf{V}$ de la particule de masse nm avec la direction x ?

Indications : Vous pourrez montrer dans un premier temps que $v_x = V_x = v_0/(n+1)$ et que $v_y = nV_y$.

Exercice 3 : Moment d'inertie d'un cône de révolution

On considère un cône de révolution, de masse M, de densité de masse uniforme ρ, de rayon de base R et de hauteur h, comme le montre la Fig. 2. Dans la suite de cet exercice, on utilisera le système de coordonnées cylindriques usuel (r, θ, z), et le repère cartésien $(0, x, y, z)$ est placé comme l'indique la figure.

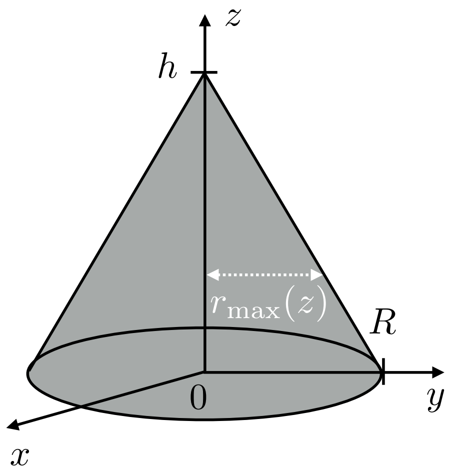

FIGURE 2

(a) Montrez que pour un z donné, l'extrémité radiale du cône $r_{\max}(z)$ est donnée par (voir Fig. 2)

$$r_{\max}(z) = \frac{R}{h}(h - z).$$

(b) Démontrez par le calcul que le volume V du cône est donné par

$$V = \frac{\pi}{3}R^2 h.$$

(c) Montrez que le moment d'inertie I du cône par rapport à l'axe de rotation selon z est donné par

$$I = \beta M R^2,$$

où β est une constante que vous déterminerez.

(d) Application numérique : quelle est la valeur de I pour $M = 10\,\text{kg}$ et $R = 10\,\text{cm}$? Si le cylindre a une vitesse angulaire $\omega = 1\,\text{rad/s}$, quel est son moment cinétique selon z ? Quelle est son énergie cinétique ?

Exercice 4 : Particule ponctuelle dans un hémisphère

Une particule ponctuelle de masse m se situe au fond d'un hémisphère (creux) de rayon R (voir Fig. 3) et est placée dans le champ de pesanteur d'accélération g. Dans la suite, on néglige tout frottement. On utilisera dans cet exercice le système de coordonnées sphériques usuel (r, θ, φ), et le repère cartésien $(0, x, y, z)$ est placé comme l'indique la figure.

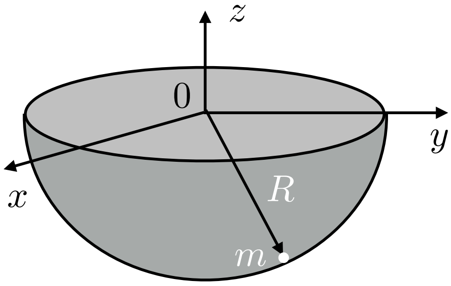

FIGURE 3

(a) Justifiez soigneusement que l'énergie potentielle V de la particule est donnée par

$$V = mgR\cos\theta,$$

où le zéro de potentiel est pris en $z = 0$ (voir Fig. 3).

(b) Déterminez le lagrangien $\mathcal{L}$ du système. On rappelle qu'en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}$.

(c) Montrez, grâce à l'équation d'Euler–Lagrange pour la variable θ, que

$$\ddot{\theta} = \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\sin\theta.$$

(d) À l'aide de l'équation d'Euler–Lagrange pour la variable φ, montrez que la quantité

$$L = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

est conservée. À quelle quantité physique correspond L ?

(e) En utilisant les réponses aux questions (c) et (d) ci-dessus, montrez que la particule est régie par l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} = \frac{L^2}{m^2R^4}\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta. \tag{1}$$

(f) On cherche désormais à décrire le mouvement de la particule proche du fond de l'émisphère (c'est-à-dire lorsque $\theta \to \pi$). On défini pour cela l'angle $\alpha = \pi - \theta \ll 1$. En utilisant des développement limités appropriés et l'Eq. (1), montrez que l'angle α est déterminé par l'équation différentielle

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R}\alpha = \frac{L^2}{m^2R^4}\,\frac{1}{\alpha^3}.$$

(g) Pour $L = 0$ (à quelles conditions initiales cela correspond ?), montrez que la particule effectue un mouvement harmonique au fond de l'hémisphère de pulsation $\omega = \sqrt{g/R}$.