

## Mécanique 2 Notes de cours

---

**Préambule :** Ces notes de cours sont, pour une large part, une retranscription personnelle et francophone de certaines parties de l'excellent livre de David Morin de l'Université Harvard, *Introduction to Classical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007). Une certaine partie des figures de ces notes sont également extraites [avec modification(s) ou non] de ce livre, que je vous encourage toutes et tous à vous procurer (de façon légale, bien entendu!).

Pour plus de détails : <https://scholar.harvard.edu/david-morin/classical-mechanics>

**Notations :**

- un champ de vecteur est noté en gras :  $\mathbf{v}$  ;
- un vecteur unitaire est noté avec un chapeau :  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \mathbf{v}/v$  ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est noté  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

**Dernière mise à jour :** 13 avril 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>STATIQUE</b>	<b>3</b>
1.1	Forces se compensant	3
1.2	Couples se compensant (moment d'une force)	4
<b>2</b>	<b>PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (rappels)</b>	<b>7</b>
2.1	Lois de Newton	7
2.2	Isolement d'un solide – diagramme du corps libre	7
2.3	Résolution d'équations différentielles de base	7
2.4	Mouvement d'un projectile	9
2.5	Mouvement dans un plan – coordonnées polaires	9
<b>3</b>	<b>CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT (rappels et compléments)</b>	<b>11</b>
3.1	Conservation de l'énergie à une dimension	11
3.1.1	Théorème de l'énergie cinétique	12
3.1.2	Forces conservatives	12
3.2	Petites oscillations	13
3.3	Conservation de l'énergie à trois dimensions	14
3.4	Quantité de mouvement	16
3.4.1	Conservation de la quantité de mouvement	16
3.4.2	Mouvement d'une fusée	17
3.5	Référentiel du centre de masse	17
3.5.1	Définition	17
3.5.2	Énergie cinétique	19
3.6	Chocs de particules	19
3.6.1	Collision à une dimension	19
3.6.2	Collision à deux dimensions	20
<b>4</b>	<b>DYNAMIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE</b>	<b>23</b>
4.1	Mouvement dans le plan d'objets planaires	23
4.1.1	Rotation autour d'un axe fixe	24
4.1.2	Mouvement général dans le plan	25
4.1.3	Théorème des axes parallèles (Huygens–Steiner)	30
4.2	Objets non-planaires	31
4.3	Moment d'une force	33
4.3.1	Particule ponctuelle, origine du repère fixe	33
4.3.2	Solide indéformable, origine du repère fixe	34
4.3.3	Solide indéformable, origine du repère en mouvement	36
4.4	Collisions	39
<b>5</b>	<b>NOTIONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE</b>	<b>41</b>

# 1 STATIQUE

## 1.1 Forces se compensant

Ce premier chapitre s'intitule « statique » car tous les objets composant les systèmes que nous allons y considérer sont **au repos**. Si un objet est au repos, sa vitesse et son accélération sont nulles, et la 2<sup>e</sup> loi de Newton  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}$  nous dit donc que **la force externe totale s'exercant sur l'objet est nulle**.

Attention : la réciproque est fautive ! En effet, si  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , on a alors  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  et donc en intégrant  $\mathbf{v} = \mathbf{constante}$ , ce qui ne correspond bien sûr pas à un objet au repos.

Dans la suite de ce cours, nous rencontrerons principalement 4 types de forces, qui sont discutées ci-dessous.

- **Force de gravitation – Pesanteur** : Considérons deux masses ponctuelles  $M$  et  $m$ , séparées par une distance  $R$ . La loi de la gravitation universelle de Newton nous dit que la force entre ces deux objets est attractive et a une amplitude

$$F = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (1.1)$$

où  $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ . Comme nous le verrons plus tard dans ce cours (et comme vous l'avez sans doute déjà vu en 1<sup>re</sup> année), cette loi s'applique également à des objets non-ponctuelles. En particulier, une sphère peut-être traitée comme une particule ponctuelle dont toute la masse est concentrée en son centre. Un objet à la surface de la Terre ressent donc une force gravitationnelle donnée par

$$F = m \left( \frac{GM}{R^2} \right) \equiv mg, \quad (1.2)$$

où  $M$  est la masse de la Terre et  $R$  son rayon. L'équation ci-dessus définit donc l'accélération de la pesanteur  $g$ , qui vaut approximativement  $g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$ .

- **Force normale** : La force normale  $N$  est la force perpendiculaire à une surface que celle-ci exerce sur un objet, lui-même posé sur cette surface. Attention, la force totale exercée par la surface n'est pas que donnée par  $N$ . En effet, il y a aussi la force de friction, parallèle à la surface, et que nous discutons ci-après.
- **Force de friction** : La force de friction  $F_f$  est la force parallèle à une surface, que celle-ci exerce sur un objet. Il existe essentiellement deux types de forces de friction : la friction *cinétique* et la friction *statique*.

- ★ Friction cinétique : La force de friction cinétique  $F_f^c$  est la friction entre deux objets en contact et qui bouge l'un par rapport à l'autre. C'est généralement une bonne approximation de supposer que la friction cinétique entre deux objets est proportionnelle à la force normale  $N$  entre eux. On écrit donc

$$\boxed{F_f^c = \mu_c N}, \quad (1.3)$$

où  $\mu_c$  est le coefficient de friction cinétique.<sup>1</sup> La direction de la force de friction cinétique  $F_f^c$  est *opposée* au mouvement de l'objet par rapport à la surface.

- ★ Friction statique : La force de friction statique  $F_f^s$  est la friction entre deux objets en contact et au repos l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas, la seule information dont nous disposons est que

$$\boxed{F_f^s \leq \mu_s N}, \quad (1.4)$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de friction statique, lui aussi sans dimension bien sûr. On notera l'inégalité dans l'équation ci-dessus. En effet, la seule chose que l'on sâche est que la

---

1. On notera que  $\mu_c$  est sans dimension, i.e.,  $[\mu_c] = 1$ .

force de friction statique à une valeur maximale  $F_{f,\max}^s = \mu_s N$ . Si la force appliquée à l'objet en contact avec la surface excède cette valeur maximale, l'objet se met alors en mouvement, et subit donc une friction cinétique donnée par l'Eq. (1.3), comme l'illustre l'exemple ci-après.

Imaginons un bloc de masse  $M$  reposant sur une surface horizontale, et auquel on applique une force également horizontale  $F_{\text{app}}$ , disons vers la droite. Les forces qui s'exercent alors sur le bloc sont  $F_{\text{app}}$ , son poids  $P = Mg$  vers le bas, et la force normale  $N$  vers le haut. Le bloc ne bougeant pas dans la direction verticale (il reste en contact avec la surface), le bilan des forces nous donne donc que  $N = Mg$ . De plus, si  $M$  ne bouge pas, on a alors  $F_{\text{app}} = -F_f^s$ , et c'est bien la force de friction qui s'oppose au mouvement de l'objet. En revanche, si  $F_{\text{app}} > \mu_s N = \mu_s Mg$ , alors le bloc bouge vers la droite.

- **Tension** : La tension (notée généralement  $T$ ) est la force exercée par une corde, un bâton, *etc.*, lorsque l'on tire dessus. Chaque bout de la corde ressent une tension dans les deux directions opposées, sauf les deux extrémités de la corde, où d'un côté s'exerce la tension, et de l'autre la force exercée par l'objet attaché à la corde. Dans certains cas, la tension peut varier le long de la corde (par exemple comme c'est le cas dans l'un des exemples ci-dessous). Dans d'autres cas, la tension doit être la même partout. C'est le cas par exemple pour une corde pendante dont on néglige la masse, où  $T$  doit être constant tout le long de la corde, car sinon la 2<sup>e</sup> loi de Newton ( $F = ma$ ) nous donnerait une accélération  $a = \infty$  (puisque  $m = 0$ ).

**Exemples :**

1/ **Bloc sur un plan incliné** : (...)

2/ **Corde autour d'un poteau** : (...)

## 1.2 Couples se compensant (moment d'une force)

Dans un problème de statique, il faut non seulement faire le bilan des forces s'appliquant à un système donné, mais aussi le bilan des **moments des forces** (ou « couples »). Nous formaliserons cette notion plus précisément au Chapitre 4, mais considérons pour le moment la situation suivante : trois forces  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) s'appliquent perpendiculairement à une barre rigide, et cette dernière est supposée être au repos (voir Fig. 1.1). Puisque la barre est au repos, nous savons bien sûr que  $F_1 + F_2 = F_3$ . Mais nous avons aussi la relation énoncée ci-après.

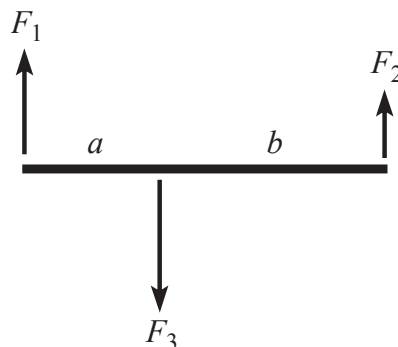


FIGURE 1.1

**Affirmation 1.1** : Si le système est statique, alors

$$\boxed{F_3 a = F_2 (a + b)}, \quad (1.5)$$

*c'est-à-dire* : les moments des forces (= force  $\times$  distance) s'annulent autour de l'extrémité gauche de la barre. En fait, les moments des forces s'annulent autour de n'importe quel point de la barre !

La preuve formelle de l’Affirmation 1.1 sera présentée au Chapitre 4. En attendant, voici une ébauche de « preuve », où l’on suppose que

$$F_3 f(a) = F_2 f(a + b), \quad (1.6)$$

avec  $f(x)$  une fonction à déterminer. On applique maintenant la supposition (1.6) à l’extrémité droite de la tige de la Fig. 1.1, ce qui nous donne

$$F_3 f(b) = F_1 f(a + b). \quad (1.7)$$

En additionnant les Eqs. (1.6) et (1.7), on obtient alors

$$F_3 [f(a) + f(b)] = (F_1 + F_2) f(a + b). \quad (1.8)$$

Or puisque  $F_3 = F_1 + F_2$ , on a donc

$$f(a) + f(b) = f(a + b). \quad (1.9)$$

Ceci implique alors que

$$f(rx) = rf(x), \quad (1.10)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall r \in \mathbb{Q}$ . En effet, en posant  $b = a$  dans l’Eq. (1.9), on obtient  $2f(a) = f(2a)$ . De même en posant  $b = 2a$ , on a  $f(a) + f(2a) = f(3a)$ . Or puisque  $f(2a) = 2f(a)$ , on a alors  $3f(a) = f(3a)$ . Par itération, on se convainc donc que  $n_1 f(a_1) = f(n_1 a_1)$  avec  $n_1 \in \mathbb{N}$  et  $\forall a_1 \in \mathbb{R}$ . De même,  $n_2 f(a_2) = f(n_2 a_2)$  avec  $n_2 \in \mathbb{N}$  et  $\forall a_2 \in \mathbb{R}$ . Étant donnés  $n_1, n_2$  et  $a_1$ , on choisit  $a_2$  tel que  $n_1 a_1 = n_2 a_2$ . D’où  $n_1 f(a_1) = n_2 f(a_2)$ , et donc  $(n_1/n_2)f(a_1) = f([n_1/n_2]a_1)$ , ce qui prouve l’égalité (1.10). De l’Eq. (1.10), et en supposant que  $f$  est continue, on en déduit donc que  $f(x) = Ax$ , ce qui prouve alors l’Affirmation 1.1.<sup>2</sup>

Remarquons qu’en divisant l’Eq. (1.6) par l’Eq. (1.7), on obtient  $f(a)/f(b) = F_2/F_1$ , et donc  $F_1 a = F_2 b$ . Donc les moments des forces s’annulent par rapport au pivot où  $F_3$  s’applique (cf. Fig. 1.1). Plus généralement, on montre que les moments des forces s’annulent autour de *n’importe quel pivot*. Attention, dans un problème donné, il faut bien sûr calculer les moments des forces par rapport au *même* pivot !

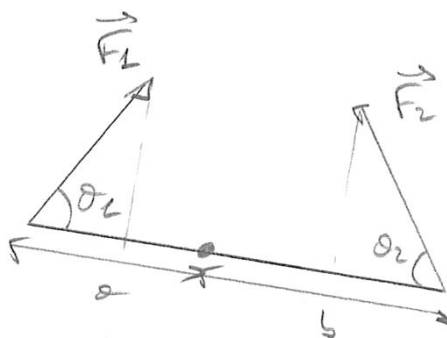


FIGURE 1.2

Si les forces qui s’appliquent à la barre ne sont pas perpendiculaires à celle-ci, comme l’illustre la Fig. 1.2, l’Affirmation 1.1 s’applique aux composantes des forces *perpendiculaires* à la barre. Ceci a clairement du sens physique, car les composantes parallèles n’ont pas d’effet sur la rotation de l’objet autour du pivot. On a donc

$$(F_1 \sin \theta_1) a = (F_2 \sin \theta_2) b. \quad (1.11)$$

**Remarques :**

- On remarque que l’on peut contrebalancer une force importante par un bras de levier suffisamment long, comme l’illustre la Fig. 1.3.

2. On notera que la constante  $A$  s’annule dans l’égalité de l’Affirmation 1.1, et est donc non pertinente.

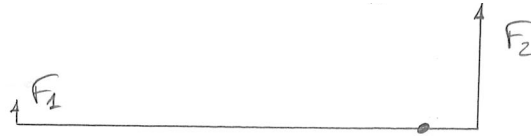


FIGURE 1.3

- Le couple gravitationnel sur une tige de masse  $M$  est le même que le couple gravitationnel dû à une particule ponctuelle située au centre de la tige (si celle-ci à une densité de masse uniforme). Plus généralement, le couple dû à  $M\mathbf{g}$  sur un objet rigide quelconque de masse  $M$  peut être traité simplement comme le couple gravitationnel dû à  $M\mathbf{g}$  sur le *centre de masse*. Nous reviendrons au Chapitre 4 sur la démonstration d'une telle affirmation.

**Exemple : échelle contre un mur (...)**

## 2 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (rap-pels)

### 2.1 Lois de Newton

En 1687, Isaac Newton énonce, dans son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, les 3 lois suivantes :

- **1<sup>re</sup> loi** : Dans un référentiel *inertiel* (i.e., galiléen), un corps se meut avec une vitesse constante (qui peut être nulle) s'il est soumis à une force totale externe nulle.
- **2<sup>e</sup> loi – Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD)** : Dans un référentiel inertiel,

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}, \quad (2.1)$$

où  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  représente la somme des forces externes qui s'appliquent au système, et où  $\mathbf{p}$  est sa **quantité de mouvement**. Pour une particule non-relativiste, on a  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , avec la vitesse  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$ .

Si la masse  $m$  est indépendante du temps  $t$ , le PFD (2.1) se réduit alors à

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}}, \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2 = \ddot{\mathbf{r}}$  l'accélération.<sup>3</sup>

- **3<sup>e</sup> loi – Principe d'Action/Réaction** : Tout corps  $A$  exerçant une force sur un corps  $B$  subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercé par le corps  $B$  :

$$\boxed{\mathbf{F}_{A/B} = -\mathbf{F}_{B/A}}, \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{F}_{A/B}$  est la force exercée par  $A$  sur  $B$  et  $\mathbf{F}_{B/A}$  la force exercée par  $B$  sur  $A$ .

On remarquera que cette 3<sup>e</sup> loi est équivalente à la conservation de la quantité de mouvement totale  $\mathbf{p}_{\text{tot}}$  d'un système isolé. En effet, pour les deux corps  $A$  et  $B$  considérés ci-dessus, on a, en utilisant le PFD (2.1)

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}_A + \dot{\mathbf{p}}_B = \mathbf{F}_{B/A} + \mathbf{F}_{A/B} = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

### 2.2 Isolement d'un solide – diagramme du corps libre

L'idée de ce que l'on appelle « l'isolement d'un solide » est de déterminer toutes les forces extérieures en présence et d'utiliser le PFD (2.2) afin de déterminer l'accélération  $\mathbf{a}$  (et donc par intégration le mouvement du système), comme l'illustre les trois exemples ci-dessous.

**Exemples :**

1/ **Plan incliné** : (...)

2/ **Plateforme et poulie** : (...)

3/ **Machine d'Atwood** : (...)

### 2.3 Résolution d'équations différentielles de base

À 1D, le PFD nous donne comme équation différentielle  $F = m\ddot{x}$ , où  $F$  représente la somme des forces extérieures. La question que l'on se pose dans ce paragraphe est, à partir de cette

---

3. On remarque que si  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , alors  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , et donc  $\mathbf{v}$  est constante, en accord bien sûr avec la 1<sup>re</sup> loi.

équation, comment déterminer  $x(t)$ . Dans la suite, nous allons voir (ou rappeler) un certain nombre de techniques permettant de résoudre des équations différentielles de base.

Soit l'équation différentielle

$$m\ddot{x} = F(t, x, v) \quad (2.5)$$

avec

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

la vitesse. Dans la suite, on suppose que les conditions initiales au temps  $t_0$  sont données par  $x(t_0) = x_0$  et  $v(t_0) = v_0$ .

- Si  $F(t, x, v) = F(t)$  : Si la force  $F$  ne dépend que du temps  $t$ , le PFD (2.5) s'écrit, en utilisant le fait que l'accélération  $a = \ddot{x} = dv/dt$ , comme

$$m \frac{dv}{dt} = F(t). \quad (2.7)$$

On sépare alors les variables dans l'équation ci-dessus afin d'obtenir

$$mdv = F(t)dt, \quad (2.8)$$

que l'on intègre entre l'instant initial  $t_0$  (pour lequel la vitesse vaut  $v_0$ ) et l'instant  $t$  (où la vitesse est  $v(t)$ ) :

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t dt' F(t'). \quad (2.9)$$

De cette équation, en intégrant le membre de gauche, on a donc la vitesse

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t') + v_0. \quad (2.10)$$

On sépare ensuite les variables dans l'Eq. (2.6), ce qui donne

$$dx = v(t)dt \quad (2.11)$$

que l'on intègre comme

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t dt' v(t'), \quad (2.12)$$

c'est-à-dire

$$x(t) = \int_{t_0}^t dt' v(t') + x_0. \quad (2.13)$$

En injectant l'Eq. (2.10) dans l'expression ci-dessus, on obtient finalement

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') + v_0(t - t_0) + x_0, \quad (2.14)$$

c'est-à-dire qu'on a simplement intégré deux fois l'équation différentielle de départ.

- Si  $F(t, x, v) = F(x)$  : Si la force  $F$  ne dépend que de  $x$ , on écrit l'accélération comme suit :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}. \quad (2.15)$$

L'Eq. (2.5) s'écrit alors comme

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x). \quad (2.16)$$

On sépare alors les variables,

$$mvdv = F(x)dx \quad (2.17)$$



et l'on intègre :

$$m \int_{v_0}^{v(x)} dv' v' = \int_{x_0}^x dx' F(x') \Leftrightarrow m \frac{v'^2}{2} \Big|_{v_0}^{v(x)} = \int_{x_0}^x dx' F(x'). \quad (2.18)$$

On obtient alors

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int_{x_0}^x dx' F(x') + v_0^2}. \quad (2.19)$$

Afin d'obtenir  $x(t)$  à partir de l'équation ci-dessus, on écrit ensuite que  $dx/dt = v(x)$ , on sépare les variables en  $dx/v(x) = dt$  et l'on intègre,

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0, \quad (2.20)$$

ce qui nous donne alors  $t = t(x)$ . En inversant cette relation,<sup>4</sup> on obtient finalement  $x(t)$ .

- Si  $F(t, x, v) = F(v)$  : Si la force  $F$  ne dépend que de la vitesse  $v$ , on écrit

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \quad (2.21)$$

on sépare les variables, et on intègre

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0, \quad (2.22)$$

ce qui nous donne alors  $t = t(v)$ . On inverse afin d'obtenir  $v(t)$ , puis on intègre à nouveau pour obtenir finalement  $x(t)$ .

**Exemples :**

1/ **Force de gravitation : (...)**

2/ **Ballon : (...)**

## 2.4 Mouvement d'un projectile

(...)

## 2.5 Mouvement dans un plan – coordonnées polaires

Pour un mouvement plan, il est souvent utile d'introduire des **coordonnées polaires**  $r$  et  $\theta$ , définies par (cf. Fig. 2.1)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}. \quad (2.23)$$

Le but de ce paragraphe est d'écrire le PFD (2.2) en coordonnées polaires.

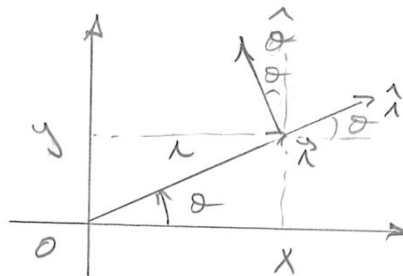


FIGURE 2.1

4. ce qui n'est pas toujours possible !

On a tout d'abord  $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$ , que l'on va dériver par rapport au temps afin d'obtenir la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$ , à partir de laquelle on calculera l'accélération  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Pour ce faire, il faut prendre garde au fait que les vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  sont liés au point *mobile* et, de ce fait, dépendent du temps, contrairement aux vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  du repère cartésien ! Afin de déterminer  $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$  et  $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ , on projette alors  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  sur les axes  $x$  et  $y$  (voir Fig. 2.1) :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}. \end{cases} \quad (2.24)$$

En dérivant les deux équations ci-dessus par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{r}}} = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{y}} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{y}} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}}. \end{cases} \quad (2.25)$$

On obtient donc pour la vitesse en coordonnées polaires

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r \hat{\mathbf{r}}) = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}}, \quad (2.26)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}.} \quad (2.27)$$

Dans l'équation ci-dessus, le terme  $\dot{r} \hat{\mathbf{r}}$  correspond à la vitesse radiale, alors que le terme  $r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$  correspond à la vitesse angulaire.

Afin d'obtenir l'accélération, on dérive l'Eq. (2.27) par rapport au temps. On a donc

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r}(\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où l'on a utilisé l'Eq. (2.25). On obtient finalement l'accélération

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}}.} \quad (2.29)$$

Dans cette expression, les termes  $\ddot{r} \hat{\mathbf{r}}$  et  $r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$  correspondent, respectivement, aux accélérations radiale et tangentielle. Les termes  $-r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}}$  et  $2\dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$  correspondent, respectivement, aux « forces » centripète et de Coriolis.

**Exemple : pendule circulaire (...)**

### 3 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT (rappels et compléments)

Les lois de conservation sont très importantes et très utiles en physique. Par « quantité conservée », on entend une quantité qui **reste constante au cours du temps**. En principe, il n'est pas nécessaire d'utiliser des lois de conservation pour résoudre un problème donné. En revanche, ces quantités conservées sont bien souvent extrêmement utiles pour résoudre un problème, voire indispensables. En effet, énormément de problèmes sont tout simplement impossibles à résoudre avec le seul PFD  $F = ma$ .

#### 3.1 Conservation de l'énergie à une dimension

On considère dans un espace à 1D une particule ponctuelle de masse  $m$  soumise à une force  $F = F(x)$  qui ne dépend que de la position  $x$ . D'après le PFD, on a

$$F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}. \quad (3.1)$$

On sépare alors les variables et on intègre d'un point arbitraire  $x_0$  où la vitesse est  $v_0$  :

$$\int_{x_0}^x dx' F(x') = m \int_{v_0}^v dv' v' = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (3.2)$$

On a donc

$$E = \frac{mv^2}{2} - \int_{x_0}^x dx' F(x') \quad (3.3)$$

avec la constante  $E = mv_0^2/2$  qui dépend de  $v_0$ , et donc de  $x_0$ . On définit l'**énergie potentielle**  $V(x)$  comme

$$V(x) = - \int_{x_0}^x dx' F(x') \quad (3.4)$$

et l'**énergie cinétique** comme  $mv^2/2$ . On a alors l'**énergie mécanique** totale

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(x). \quad (3.5)$$

L'équation ci-dessus est satisfaite  $\forall x$ . L'énergie totale  $E$  est donc conservée si  $F = F(x)$ . Par exemple, si  $V(x)$  diminue (augmente), alors  $mv^2/2$  doit augmenter (diminuer) afin de conserver  $E$ , et donc  $|v|$  augmente (diminue).

Remarquons que la conservation de l'énergie peut également être obtenue de la façon suivante : on part du PFD  $m\ddot{x} = F(x)$  que l'on multiplie par  $\dot{x}$  afin d'obtenir

$$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) = \dot{x}F(x) \quad (3.6)$$

et que l'on intègre entre les instants  $t_0$  et  $t$  :

$$\frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} (\dot{x}^2) = \int_{t_0}^t dt' \dot{x} F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^x dx' F(x'). \quad (3.7)$$

D'où

$$\frac{mv^2}{2} - \int_{x_0}^x dx' F(x') = \text{constante} = E. \quad (3.8)$$

**Remarque importante :**  $E$  et  $V(x)$  dépendent du choix de  $x_0$ . Ces quantités n'ont donc pas à proprement parler de sens physique. C'est seulement la *différence*  $E - V(x) = mv^2/2$ , qui ne dépend pas de  $x_0$ , qui a un sens. Par exemple, si l'on considère le poids  $F = -mg$ , on peut prendre le zéro de potentiel en  $z = 0$  et écrire  $V(z) = mgz$ , mais l'on pourrait très bien le prendre en  $z = h$ , et écrire  $V(z) = - \int_h^z dz' (-mg) = mg(z - h)$ .

### 3.1.1 Théorème de l'énergie cinétique

Considérons la loi de conservation (3.5) évaluée en deux points  $x_1$  et  $x_2$ , d'où l'on tire que

$$E = \frac{m}{2}v(x_1)^2 + V(x_1) = \frac{m}{2}v(x_2)^2 + V(x_2). \quad (3.9)$$

D'où

$$\frac{m}{2}v(x_2)^2 - \frac{m}{2}v(x_1)^2 = V(x_1) - V(x_2). \quad (3.10)$$

Avec la définition (3.4), nous avons donc

$$\frac{m}{2}v(x_2)^2 - \frac{m}{2}v(x_1)^2 = - \int_{x_0}^{x_1} dx F(x) + \int_{x_0}^{x_2} dx F(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x) = W_{x_1 \rightarrow x_2} \quad (3.11)$$

avec

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x) \quad (3.12)$$

le travail<sup>5</sup> de la force  $F(x)$  effectué sur la particule lorsque celle-ci se déplace de  $x_1$  à  $x_2$ . On en déduit donc le théorème suivant :

**Théorème 3.1 (théorème de l'énergie cinétique) :** *Le changement d'énergie cinétique d'une particule entre deux points  $x_1$  et  $x_2$  est égal au travail effectué sur la particule entre  $x_1$  et  $x_2$ .*

**Remarques :**

- Si la force  $F$  pointe dans la même direction que le mouvement (i.e.,  $F(x)$  et  $dx$  ont le même signe), alors  $W_{x_1 \rightarrow x_2} > 0$ , et donc, d'après le Théorème 3.1,  $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 > 0$ . Il s'en suit que  $|v_2| > |v_1|$ , c'est-à-dire que la vitesse de la particule augmente. A contrario, si  $F(x)dx < 0$  (force et déplacement sont dans des sens opposés),  $W_{x_1 \rightarrow x_2} < 0$ , et donc  $|v_2| < |v_1|$  : la particule ralentit.
- De la définition (3.4), on a bien sûr la relation

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}. \quad (3.13)$$

On remarque que, étant donné  $V$ , il est trivial de déterminer  $F$ . En revanche, le contraire peut être moins évident ...

- Interprétation « colline-vallée » de  $V(x)$  et  $F(x) = -dV/dx$  : (...)

**Exemples :**

1/ **Énergie potentielle gravitationnelle :** (...)

2/ **Gravité près de la Terre :** (...)

### 3.1.2 Forces conservatives

Étant donnée une force quelconque (i.e.,  $F = F(x, v, t)$ ), on peut toujours définir et calculer le travail effectué par celle-ci sur la particule. En effet,

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, v, t) = \int_{x_1}^{x_2} dx ma = \int_{x_1}^{x_2} dx m \frac{dv}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} dx m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3.14)$$

et donc

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx mv \frac{dv}{dx} = \int_{v_1}^{v_2} dv mv = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2. \quad (3.15)$$

Or, ceci n'a un sens que si  $W_{x_1 \rightarrow x_2}$  est indépendant du chemin emprunté par la particule. C'est le cas si  $F(x, v, t) = F(x)$ . En effet,  $\int_{x_1}^{x_2} dx F(x)$  est l'aire (avec un signe) sous la courbe  $F(x)$ . Si l'on considère par exemple la force quelconque  $F(x)$  représentée à la Fig. 3.1, on a  $W_{x_1 \rightarrow x_2} = W_{x_1 \rightarrow x_2}^{\text{trajet direct}} + W_{x_2 \rightarrow x_3} + W_{x_3 \rightarrow x_2}$ . Or  $W_{x_3 \rightarrow x_2} = -W_{x_2 \rightarrow x_3}$  [cf. Eq. (3.12)] et donc  $W_{x_1 \rightarrow x_2}$  ne dépend pas du chemin emprunté.

5. « work » en anglais

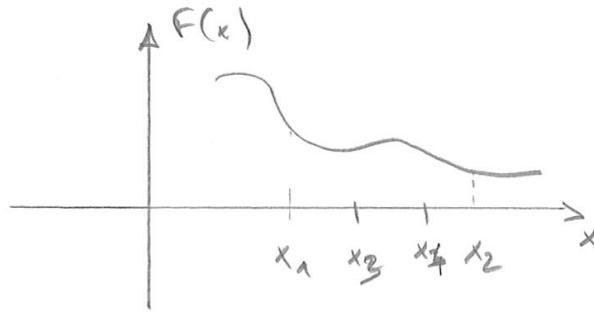


FIGURE 3.1

Pour d'autres forces,  $W_{x_1 \rightarrow x_2}$  dépend de la trajectoire, comme c'est le cas si  $F = F(t)$  ou  $F = F(v)$  [ou les deux :  $F = F(v, t)$ ]. Dans ce cas, la définition (3.12) n'a donc aucun sens, et l'énergie n'est pas conservée [puisque le travail, ou l'énergie potentielle (3.4) dépendraient alors du chemin emprunté et/ou des instants  $t_1$  à  $t_2$  pendant lesquels le trajet a lieu!]. Ceci est illustré dans l'exemple ci-dessous.

### Exemple – force de frottement : (...)

Les considérations ci-dessus nous amènent donc à la définition d'une **force conservative** : *Une force conservative est une force pour laquelle le travail effectué correspondant est indépendant du chemin emprunté pour aller d'un point à un autre. À 1D, une force est conservative si et seulement si  $F = F(x)$ .*<sup>6</sup>

En conséquence, l'énergie potentielle  $V = V(x)$  n'a donc de sens que pour une force conservative. Comme évoqué précédemment, la définition (3.4) n'a de sens que si l'intégrale ne dépend pas du chemin emprunté (sinon il faudrait spécifier le chemin, et on ne pourrait pas assigner une valeur unique à  $V$  en un point  $x$  donné).

Les exemples de forces conservatives sont nombreux : gravitation, loi de Hooke, loi de Coulomb, ... Un exemple de force non conservative sont les forces de frottement.

## 3.2 Petites oscillations

Considérons une particule ponctuelle de masse  $m$  soumise à un potentiel uni-dimensionnel quelconque  $V(x)$ . Supposons que la particule soit au repos à un minimum local  $x_0$  de  $V(x)$  (voir Fig. 3.2). L'expérimentateur donne alors une petite impulsion à la particule. La question que l'on se pose est de connaître alors le mouvement de la particule.

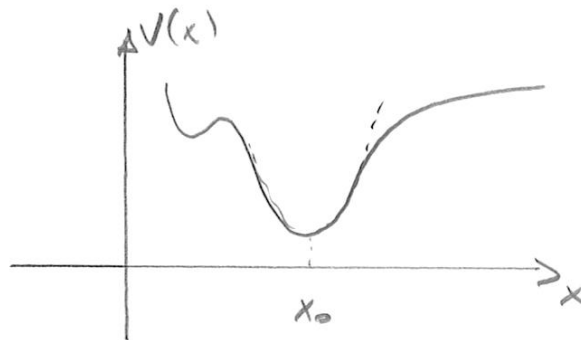


FIGURE 3.2

Pour ce faire, on effectue le développement de Taylor de  $V(x)$  autour du minimum  $x_0$  :

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (3.16)$$

6. Nous verrons au §3.3 qu'à 3D, il faut une condition de plus pour qu'une force soit conservative (il faut en effet que le rotationnel de cette force soit également nul).

Puisque  $x_0$  est un minimum (au moins local) de  $V(x)$ , nous savons, par définition, que  $V'(x_0) = 0$ . De plus, le premier membre  $V(x_0)$  du développement ci-dessus est une constante, non pertinente, que l'on peut donc poser égale à zéro [ $V(x_0) = 0$ ]. Le premier terme non nul et pertinent de l'Eq. (3.16) est donc celui proportionnel à la courbure en  $x_0$  du potentiel  $V(x)$ , c'est-à-dire  $V''(x_0)$ . Pour  $|x - x_0|$  suffisamment petit, on peut donc retenir uniquement ce terme, et approximer

$$V(x) \simeq \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (3.17)$$

Si l'on pose  $k = V''(x_0)$ , l'expression ci-dessus a donc la même forme que la loi de Hooke

$$V(x) \simeq \frac{k}{2}(x - x_0)^2. \quad (3.18)$$

Le mouvement est donc *harmonique* et donné par

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.19)$$

avec la pulsation  $\omega = \sqrt{k/m}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}}. \quad (3.20)$$

On notera, comme nous le verrons en TD, que les considérations ci-dessus n'ont de sens que si  $V''(x_0) \neq 0$ .

**Exemple : (...)**

### 3.3 Conservation de l'énergie à trois dimensions

Considérons le PFD à 3D,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , où  $F = F(\mathbf{r})$  est une force qui dépend uniquement de  $\mathbf{r}$ .<sup>7</sup> Si l'on projette le PFD en coordonnées cartésiennes, nous avons alors

$$F_x(x, y, z) = m \frac{dv_x}{dt} = mv_x \frac{dv_x}{dx}, \quad (3.21a)$$

$$F_y(x, y, z) = m \frac{dv_y}{dt} = mv_y \frac{dv_y}{dy}, \quad (3.21b)$$

$$F_z(x, y, z) = m \frac{dv_z}{dt} = mv_z \frac{dv_z}{dz}, \quad (3.21c)$$

Nous en déduisons donc que

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z), \quad (3.22)$$

où  $d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$ . La quantité  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  correspond au travail infinitésimal effectuée par la force sur la particule. En intégrant l'Eq. (3.22) d'un point  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  à  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , nous obtenons donc

$$E + \int_{x_0}^x dx' F_x + \int_{y_0}^y dy' F_y + \int_{z_0}^z dz' F_z = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2, \quad (3.23)$$

où  $E (= m\mathbf{v}_0^2/2)$  correspond à la constante d'intégration. D'où

$$E = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \quad (3.24)$$

Le dernier membre de l'équation ci-dessus correspond à une *intégrale curviligne*, qui dépend a priori du chemin emprunté de  $\mathbf{r}_0$  à  $\mathbf{r}$ . On définit l'**énergie potentielle** par

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}, \quad (3.25)$$

7. Comme à 1D, toute dépendance en  $t$  ou  $\mathbf{v}$  ne donnerait pas une force conservative.

ce qui est équivalent à

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})}, \quad (3.26)$$

de sorte que l'énergie mécanique est donnée par

$$\boxed{E = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r})}. \quad (3.27)$$

Répetons encore une fois que les considérations ci-dessus ne sont valables que si et seulement si  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  ne dépend que de  $\mathbf{r}$ .

**NB :** La conservation de l'énergie à 3D explicitée ci-dessus peut également être démontrée de la façon suivante. À partir du PFD, on forme le produit scalaire avec la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$ ,

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^2) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.28)$$

et l'on intègre :

$$\frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} (\dot{\mathbf{r}}^2) = \int_{t_0}^t dt' \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}^2 - \dot{\mathbf{r}}_0^2) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'), \quad (3.29)$$

ce qui correspond bien à l'Eq. (3.27).

### Forces conservatives à 3D

Pour une force  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , il existe une infinité de chemins allant de  $\mathbf{r}_0$  à  $\mathbf{r}$  en 3D, contrairement à 1D où il n'existe qu'un seul chemin  $x_0 \rightarrow x$ . Or dans l'expression (3.25) du potentiel, il n'est pas spécifié sur quel chemin faut-il évaluer l'intégrale curviligne. Or pour que la définition de  $V(\mathbf{r})$  ait un sens, il faut que l'intégrale curviligne ne dépende pas du chemin emprunté. Comme dans le cas 1D, on appelle **force conservative** une force associée à un tel potentiel.

Quelles types de forces à 3D sont-elles conservatives ? Le théorème ci-dessous répond à cette question.

**Théorème 3.2 :** *Étant donnée une force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , une condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel (3.25) soit bien défini (c'est-à-dire que l'intégrale curviligne ne dépende pas du chemin, et donc que l'on ait une force conservative) est que le rotationnel de  $\mathbf{F}$  soit nul, i.e.,  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . En d'autres termes, le travail effectuée par la force est indépendant du chemin suivi.*

**Preuve :**

★ Supposons que  $\mathbf{F}$  soit conservative, et donc que le travail ne dépende pas du chemin emprunté. Les intégrales curvilignes de  $\mathbf{r}_0$  à  $\mathbf{r}$  selon les chemins 1 et 2 de la Fig. 3.3 sont donc les mêmes,

$$\int_{\mathbf{r}_0,1}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} = \int_{\mathbf{r}_0,2}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{r}_0,1}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} + \int_{\mathbf{r},2}^{\mathbf{r}_0} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (3.30)$$

où  $C$  est un chemin fermé quelconque. D'après le théorème de Stokes, on a donc

$$\int_S d\mathbf{S}' \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0, \quad \forall S, \quad (3.31)$$

où  $S$  est une surface quelconque supportée par le chemin fermé  $C$ . On en déduit donc que  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , et il s'en suit que  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , i.e.,  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel, puisque l'on a toujours  $\nabla \times (-\nabla V) = \mathbf{0}$ .

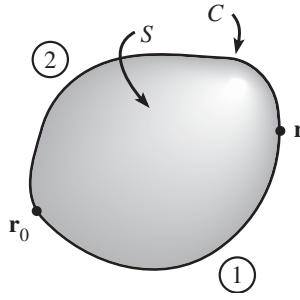


FIGURE 3.3

★ Supposons que  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel, i.e.,  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . On a donc

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot (-\nabla V) = -V(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}_0). \quad (3.32)$$

Puisque le membre de droite de l'équation ci-dessus ne dépend manifestement pas du chemin emprunté, le membre de gauche non plus — CQFD.

**Exercice :** Montrez qu'une force centrale, définie par  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}}$ , est conservative.

### 3.4 Quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** d'une particule non-relativiste est définie par

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}.} \quad (3.33)$$

#### 3.4.1 Conservation de la quantité de mouvement

Considérons deux particules  $a$  et  $b$ . Ce système composé de  $a$  et  $b$  est *isolé de toute force extérieure*. La seule force ressentie par  $a$  (par  $b$ ) est donc celle  $\mathbf{F}_{a/b}$  ( $\mathbf{F}_{b/a}$ ) exercée par  $b$  (par  $a$ ). D'après la 3<sup>e</sup> loi de Newton (principe des actions réciproques), on a  $\mathbf{F}_{a/b} = -\mathbf{F}_{b/a}$ .

De la 2<sup>e</sup> loi de Newton  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , on peut définir l'**impulsion**

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F} \quad (3.34)$$

qui correspond donc au changement de quantité de mouvement entre les deux instants  $t_1$  et  $t_2$  et qui est donné par l'intégrale temporelle de la force.

De  $\mathbf{F}_{a/b} = -\mathbf{F}_{b/a}$  évoqué ci-dessus, on en déduit donc que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{a/b} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{b/a}. \quad (3.35)$$

D'où

$$\mathbf{p}_a(t_2) - \mathbf{p}_a(t_1) = \mathbf{p}_b(t_2) - \mathbf{p}_b(t_1), \quad (3.36)$$

avec, respectivement,  $\mathbf{p}_a$  et  $\mathbf{p}_b$  les quantités de mouvement des sous-systèmes  $a$  et  $b$ . Il s'en suit donc que

$$\boxed{\mathbf{p}_a(t_2) + \mathbf{p}_b(t_2) = \mathbf{p}_a(t_1) + \mathbf{p}_b(t_1),} \quad (3.37)$$

i.e., **la quantité de mouvement totale d'un système isolé est conservée**. On notera que l'Eq. (3.37) est *vectorielle*, et correspond donc à  $d$  équations de conservation dans un espace à  $d$  dimensions.



## Conservation de la quantité de mouvement pour un système à $N$ corps

Généralisons le raisonnement ci-dessus à un système isolé de  $N$  particules en interaction mutuelle. Soit  $\mathbf{F}_{i/j}$  la force exercée par la particule  $j$  sur la particule  $i$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), avec, bien entendu,  $i \neq j$ . D'après le principe d'action-réaction, on a  $\mathbf{F}_{i/j} = -\mathbf{F}_{j/i}$ , et d'après le PFD,  $\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{i/j}$ . D'où

$$\Delta \mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}_i(t_2) - \mathbf{p}_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{i/j}. \quad (3.38)$$

Le changement de quantité de mouvement des  $N$  particules est donc donné par

$$\Delta \mathbf{P} = \sum_i \Delta \mathbf{p}_i = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{i/j} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \mathbf{F}_{i/j}. \quad (3.39)$$

Or

$$\sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \mathbf{F}_{i/j} = \mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_{1/3} + \dots + \underbrace{\mathbf{F}_{2/1}}_{=-\mathbf{F}_{1/2}} + \mathbf{F}_{2/3} + \dots + \underbrace{\mathbf{F}_{3/1}}_{=-\mathbf{F}_{1/3}} + \dots \quad (3.40)$$

De la 3<sup>e</sup> loi de Newton, on voit donc que les forces s'annulent deux à deux, et donc

$$\sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \mathbf{F}_{i/j} = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

De l'Eq. (3.39), on a donc

$$\boxed{\Delta \mathbf{P} = \mathbf{0}}, \quad (3.42)$$

de sorte que la quantité de mouvement totale d'un système isolé est conservée.

### 3.4.2 Mouvement d'une fusée

(...)

## 3.5 Référentiel du centre de masse

### 3.5.1 Définition

Lorsque nous avons défini la quantité de mouvement (3.33), nous avons choisi un certain référentiel inertiel (i.e., non accéléré). Dans cette définition, n'importe quel référentiel galiléen fait l'affaire. Il est cependant souvent utile de considérer un référentiel particulier, le *référentiel du centre de masse*. En effet, on réalisera par la suite que les phénomènes physiques y sont plus « symétriques ».

Considérons tout d'abord deux référentiels inertiels  $S$  et  $S'$ , avec  $S'$  en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $S$  avec une vitesse constante  $\mathbf{u}$  (voir Fig. 3.4).

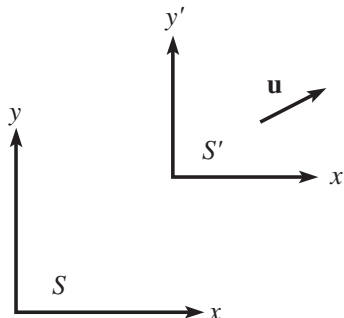


FIGURE 3.4

Soit un système de  $N$  particules de masses  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Dans le référentiel  $S$ , la particule  $i$  a une vitesse  $\mathbf{v}_i$ . Dans  $S'$ , elle a donc une vitesse  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}$ . On a donc

$$m_i \mathbf{v}'_i = m_i \mathbf{v}_i - m_i \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{u}. \quad (3.43)$$

Le système des  $N$  particules étant isolé, la quantité de mouvement totale dans  $S$  est conservée, et donc  $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{cte}$ . De plus,  $\sum_i m_i \mathbf{u} = (\sum_i m_i) \mathbf{u}$  est constant puisque la masse totale  $M = \sum_i m_i$  l'est, et que  $\mathbf{u}$  est uniforme. On en déduit donc que  $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \text{cte}$ . En d'autres termes, *si la quantité de mouvement est conservée dans un référentiel inertielle, elle l'est également dans un autre*.

Considérons alors le référentiel unique dans lequel la quantité de mouvement totale est *nulle*. On appelle ce référentiel le **référentiel du centre de masse**. Soit  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$  la quantité de mouvement totale dans  $S$ . D'après l'Eq. (3.43), le référentiel du centre de masse est donc celui avec une vitesse

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{M}}. \quad (3.44)$$

En effet, on vérifie à partir de l'Eq. (3.43) que

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) = \sum_i m_i \left( \mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{P}}{M} \right) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{P}}{M} \sum_i m_i = \mathbf{P} - \frac{\mathbf{P}}{M} \cdot M \quad (3.45)$$

et donc on a bien  $\mathbf{P}' = \mathbf{0}$ .

Il est important de constater que dans le référentiel du centre de masse, le centre de masse des particules *ne bouge pas*. On définit la position du centre de masse (repérée par rapport au référentiel  $S$ ) par

$$\boxed{\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}}, \quad (3.46)$$

avec  $M = \sum_i m_i$  et où  $\mathbf{r}_i$  est la position de la particule  $i$  par rapport à l'origine du référentiel  $S$ . On a donc

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} = \frac{\mathbf{P}}{M} = \mathbf{u}. \quad (3.47)$$

On en déduit donc que  $\mathbf{R}_{\text{CM}}$  bouge avec la même vitesse  $\mathbf{u}$  que le référentiel du centre de masse, et donc ne bouge pas par rapport à celui-ci. On choisit donc (très) souvent le centre de masse comme l'origine du référentiel du centre de masse.

Considérons maintenant que chacune des  $N$  particules composant le système soit soumise d'une part à une force *interne*  $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$  due à l'interaction avec les autres particules, et d'autre part à des forces *externes*  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ . Si l'on dérive deux fois par rapport au temps la définition (3.46), on obtient alors

$$M \ddot{\mathbf{R}}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}}), \quad (3.48)$$

où l'on a utilisé le PFD pour obtenir le membre de droite de l'équation ci-dessus. Or, d'après le principe des actions réciproques [cf. Eq. (3.41)], les forces internes s'annulent deux à deux, et donc  $\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \mathbf{0}$ . On en déduit donc le théorème suivant :

**Théorème 3.3 (théorème du centre d'inertie) :** *En ce qui concerne l'accélération  $\ddot{\mathbf{R}}_{\text{CM}}$  du centre de masse d'un système composé de  $N$  particules, on peut traiter ce système comme une particule ponctuelle, et appliquer le PFD au centre de masse (de masse  $M$ ). Autrement dit,*

$$\boxed{M \ddot{\mathbf{R}}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}}. \quad (3.49)$$

**Remarque :** Un autre référentiel très souvent utilisé est le **référentiel du laboratoire**. C'est le référentiel (supposé inertiel) dans lequel les conditions du problème sont données (vitesse initiale, etc.)

**Exemple :** (...)

### 3.5.2 Énergie cinétique

Reprenons la situation de la Fig. 3.4, où  $S'$  est le référentiel du centre de masse. L'énergie cinétique du système de  $N$  particules dans  $S'$  est donnée par la somme des énergies cinétiques des particules individuelles et a pour expression

$$K_{\text{CM}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i|^2. \quad (3.50)$$

Dans le référentiel inertiel quelconque  $S$ , l'énergie cinétique s'exprime comme

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}_i|^2. \quad (3.51)$$

Or, puisque  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{u}$ , on a donc

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i + \mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i'^2 + u^2 + 2\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{u}) = K_{\text{CM}} + \frac{M}{2} u^2 + \underbrace{\left( \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right)}_{=\mathbf{P}'=0} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.52)$$

On en déduit donc (2<sup>e</sup> Théorème de König) que

$$\boxed{K_S = K_{\text{CM}} + \frac{M}{2} u^2}, \quad (3.53)$$

c'est-à-dire que l'énergie cinétique dans n'importe quel référentiel inertiel est égale à l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse, plus l'énergie cinétique d'une particule ponctuelle de masse  $M$  localisée au centre de masse et se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{u}$ . En conséquence, si l'énergie est conservée dans une collision dans un référentiel, alors elle l'est également dans n'importe quel autre référentiel inertiel.

## 3.6 Chocs de particules

Il existe deux types de collisions entre particules :

- les chocs **élastiques**, pour lesquels l'énergie cinétique est conservée ;
- les chocs **inélastiques**, pour lesquels l'énergie cinétique n'est pas conservée.

Dans toute collision, l'énergie *totale* est conservée. Dans la suite, on se concentre uniquement sur les chocs élastiques.

### 3.6.1 Collision à une dimension

**Exemple :** On considère la collision à une dimension (1D) suivante : une particule ponctuelle de masse  $m$  est lancée vers la droite avec une vitesse  $v$  sur une particule de masse  $M$  initialement au repos. On appelle  $v_f$  et  $V_f$  les vitesses de  $m$  et  $M$  après le choc, et l'on cherche à déterminer ces deux vitesses. Pour cela, on utilise

- la conservation de la quantité de mouvement :

$$mv + 0 = mv_f + MV_f; \quad (3.54)$$

- la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2. \quad (3.55)$$

De l'Eq. (3.54), on tire  $V_f = (m/M)(v - v_f)$ , que l'on injecte ensuite dans l'Eq. (3.55), afin d'obtenir le polynôme du second degré sur  $v_f$  suivant :

$$(v_f - v) [(m + M)v_f - (m - M)v] = 0. \quad (3.56)$$

L'équation ci-dessus a une racine « évidente »,  $v_f = v$  (ce qui engendre  $V_f = 0$ ), et qui correspond aux conditions initiales. Ce n'est donc pas la bonne solution ! L'autre racine donne

$$v_f = \frac{m - M}{m + M}v, \quad V_f = \frac{2m}{m + M}v. \quad (3.57)$$

On remarque sur l'exemple ci-dessus qu'il peut être un peu pénible de résoudre le problème, ceci à cause de la forme quadratique en  $v_f$ . Le théorème ci-dessous peut alors s'avérer utile.

**Théorème 3.4 :** *Dans un choc élastique à une dimension, la vitesse relative des deux particules après la collision est moins la vitesse relative avant la collision.*

**Preuve :** Soient  $v_i$  ( $v_f$ ) et  $V_i$  ( $V_f$ ) les vitesses avant le choc (après le choc) des particules de masse  $m$  et  $M$ , respectivement. La conservation de la quantité de mouvement nous donne

$$mv_i + MV_i = mv_f + MV_f \Leftrightarrow m(v_i - v_f) = M(V_f - V_i), \quad (3.58)$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{m}{2}v_i^2 + \frac{M}{2}V_i^2 = \frac{m}{2}v_f^2 + \frac{M}{2}V_f^2 \Leftrightarrow m(v_i - v_f)(v_i + v_f) = M(V_f - V_i)(V_f + V_i). \quad (3.59)$$

En divisant l'Eq. (3.59) par l'Eq. (3.58),<sup>8</sup> on obtient  $v_i + v_f = V_i + V_f$ , c'est-à-dire  $v_i - V_i = -(v_f - V_f)$ , ce qui prouve le théorème.

### 3.6.2 Collision à deux dimensions

On considère maintenant le cas d'un choc élastique à deux dimensions (2D), la généralisation à trois dimensions étant « triviale ». La résolution d'un problème de collision à 2D est en principe la même qu'à 1D, sauf que la conservation de la quantité de mouvement est maintenant une équation *vectorielle*, qui va nous fournir deux équations scalaires.

**Exemple :** On considère la situation décrite dans la Fig. 3.5. L'angle  $\theta$  est une donnée du problème, et l'on cherche à déterminer  $v_f$ ,  $V_f$ , et l'angle  $\varphi$ . Il nous faut donc trois équations.

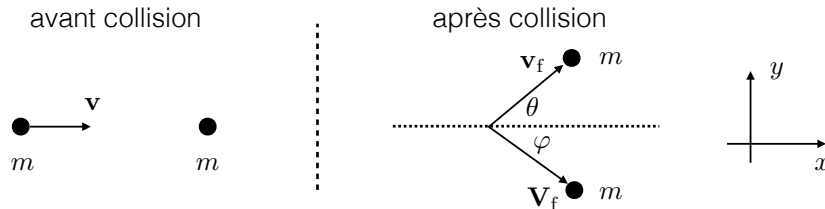


FIGURE 3.5

La conservation de la quantité de mouvement, en *vecteur*, nous donne

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_f + m\mathbf{V}_f. \quad (3.60)$$

En projetant l'équation ci-dessus selon  $x$ , on a

$$v = v_f \cos \theta + V_f \cos \varphi \Leftrightarrow V_f \cos \varphi = v - v_f \cos \theta, \quad (3.61)$$

8. Notez que  $v_i \neq v_f$  et  $V_i \neq V_f$ , qui correspondent à la solution triviale.

et selon  $y$

$$0 = v_f \sin \theta - V_f \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad V_f \sin \varphi = v_f \sin \theta. \quad (3.62)$$

La conservation de l'énergie s'écrit quant à elle

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v_f^2 + \frac{m}{2} V_f^2 \quad \Leftrightarrow \quad V_f^2 = v^2 - v_f^2. \quad (3.63)$$

On a donc trois équations et trois inconnues. En effectuant l'opération  $(3.61)^2 + (3.62)^2$ , on obtient

$$V_f^2 = (v - v_f \cos \theta)^2 + v_f^2 \sin^2 \theta. \quad (3.64)$$

On remplace ensuite dans l'équation ci-dessus  $V_f^2$  par l'Eq. (3.63) et en simplifiant, on obtient  $v_f = v \cos \theta$ . D'où  $V_f = (v^2 - v_f^2)^{1/2} = v \sin \theta$ . L'Eq. (3.62) nous donne alors  $\sin \varphi = \cos \theta$ , c'est-à-dire  $\varphi = \pi/2 - \theta$ . Les deux particules ont donc, après le choc, des trajectoires rectilignes qui sont perpendiculaires.



## 4 DYNAMIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

Le **moment cinétique** (parfois également appelé « moment angulaire ») d'une particule ponctuelle est défini par

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}, \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position de la particule,  $\mathbf{p}$  sa quantité de mouvement, et où le signe  $\times$  dénote le produit vectoriel.<sup>9</sup> *Attention,  $\mathbf{L}$  est toujours défini par rapport à une certaine origine  $O$  !* Si on change d'origine, on change  $\mathbf{L}$ . La quantité  $\mathbf{L}$  est souvent très utile, par exemple dans un problème à force centrale, où  $|\mathbf{L}| = \text{constante}$  (cf. le devoir à la maison sur le problème de Képler).

Pour un ensemble de  $N$  particules, le moment cinétique associé est simplement la somme des moments cinétiques  $\mathbf{L}_i$  des particules individuelles :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (4.2)$$

avec  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{p}_i$  la position et la quantité de mouvement de la particule  $i$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous verrons que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (4.3)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  est le **moment des forces** (parfois aussi appelé « couple ») qui s'applique sur l'objet en considération, avec  $\mathbf{F}$  la somme des forces. On remarque que cette équation est très similaire au PFD  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ . Dans la suite, nous verrons que l'Eq. (4.3) permettra de déterminer comment un solide indéformable peut effectuer des rotations, et comment  $\mathbf{L}$  varie avec le temps.

Puisque  $\mathbf{L}$  est une quantité vectorielle, elle peut varier de deux manières possibles :

- (i) sa longueur  $L = |\mathbf{L}|$  varie ;
- (ii) sa direction  $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}/L$  varie.

Dans ce cours, on se limitera au cas (i), et le cas (ii) est hors programme.

Dans la suite, nous verrons comment calculer le moment cinétique d'un objet étendu (c'est-à-dire non ponctuel), **qui sera considéré comme une collection (d'un nombre  $N \gg 1$  gigantesque) de points matériels, dont les distances mutuelles  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  sont constantes.** C'est ce que l'on appelle un **corps rigide et indéformable**.

### 4.1 Mouvement dans le plan d'objets planaires

On considère un objet bidimensionnel (rigide et indéformable), effectuant un mouvement arbitraire dans le plan ( $Oxy$ ), comme le montre la Fig. 4.1. Ce mouvement peut se décomposer en :

- un mouvement de translation que décrit son centre de masse (CM), avec une vitesse  $\mathbf{V}$  ;
- un mouvement de rotation, avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

On cherche dans la suite à déterminer le moment cinétique (4.2), où la somme est effectuée sur toutes les particules ponctuelles qui compose l'objet massif. Puisque  $N \gg 1$ , on peut approximer cette somme par une intégrale en passant à la limite continue, selon la recette

$$\boxed{\sum_{i=1}^N m_i \longrightarrow \int dm = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})}, \quad (4.4)$$

où  $\rho(\mathbf{r})$  est la densité de masse de l'objet, qui a la dimension  $[\rho] = M/L^d$ , où  $d$  est la dimensionnalité de l'objet (dans ce paragraphe,  $d = 2$ , puisque l'on considère des objets bidimensionnels).

Le but de ce paragraphe est de déterminer  $\mathbf{L}$ , qui dépend bien sûr du mouvement de l'objet. On notera que puisque l'on considère des objets 2D dont le mouvement reste dans le plan ( $Oxy$ ), on a forcément  $\mathbf{L}$  qui est orienté selon la direction  $z$  fixe, c'est-à-dire  $\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{z}}$ .

9. On rappelle que le produit vectoriel  $\mathbf{C}$  de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est défini par  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \alpha \hat{\mathbf{C}}$ , où  $\alpha$  est l'angle formé par les deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , et où le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{C}}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  selon la « règle de la main droite ».

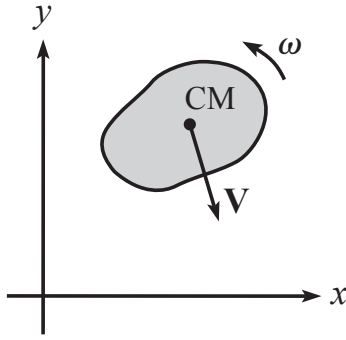


FIGURE 4.1

#### 4.1.1 Rotation autour d'un axe fixe

On considère dans un premier temps un objet 2D en rotation autour d'un axe *fixe* perpendiculaire au plan ( $Oxy$ ) et placé arbitrairement à l'origine du repère, comme le montre la Fig. 4.2.

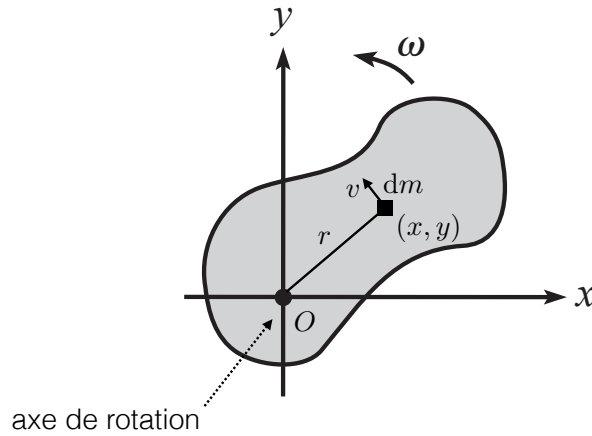


FIGURE 4.2

Concentrons nous sur un élément infinitésimal de masse  $dm$  localisé en  $(x, y)$  de cet objet. Puisque l'axe de rotation est fixe,  $dm$  décrit un mouvement circulaire de vitesse  $v = \omega r$ , avec  $\omega$  la vitesse angulaire de l'objet, et  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Le moment cinétique de cet élément infinitésimal est donc, puisque le vecteur vitesse est forcément perpendiculaire à  $r$ , égal à

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r(dm \cdot v)\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.5)$$

où l'on a utilisé le fait que la quantité de mouvement de  $dm$  est simplement  $dm \cdot v$ . Or, puisque  $v = \omega r$ , on a donc

$$d\mathbf{L} = dm \omega r^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.6)$$

Le moment cinétique total de l'objet est donc

$$\mathbf{L} = \int d\mathbf{L} = \int dm \omega r^2 \hat{\mathbf{z}} = \int dm \omega (x^2 + y^2) \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.7)$$

où l'intégrale court sur la surface de tout l'objet, avec

$$dm = \rho(x, y) dx dy, \quad (4.8)$$

où  $\rho(x, y)$  est la densité surfacique de masse. On a donc  $\mathbf{L} = L_z \hat{\mathbf{z}}$  avec

$$\boxed{L_z = I_z \omega}, \quad (4.9)$$



où

$$I_z = \int dm r^2 = \int dm (x^2 + y^2) \quad (4.10)$$

est le **moment d'inertie**, avec  $r$  la distance à l'axe de rotation perpendiculaire au plan formé par l'objet. On remarquera que l'on a naturellement  $L_x = L_y = 0$ .

Pour une collection de  $N$  masses ponctuelles  $m_i$ , la version discrète de l'Eq. (4.10) s'écrit

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (4.11)$$

avec  $r_i$  la distance entre la particule  $i$  et l'axe de rotation perpendiculaire au plan.

On se pose maintenant la question de savoir quelle est l'énergie cinétique de l'objet décrit à la Fig. 4.2. En considérant à nouveau l'élément infinitésimal  $dm$ , celui-ci a pour énergie cinétique

$$dT = \frac{dm}{2} v^2 = \frac{dm}{2} (r\omega)^2. \quad (4.12)$$

On obtient alors l'énergie cinétique  $T$  de tout l'objet en intégrant sur tous les éléments de masse :

$$T = \int dT = \int dm \frac{1}{2} (r\omega)^2. \quad (4.13)$$

En utilisant l'Eq. (4.10), on remarque donc que

$$T = \frac{I_z}{2} \omega^2. \quad (4.14)$$

Notons que l'expression ci-dessus est très similaire à l'expression de l'énergie cinétique d'une particule ponctuelle,  $\frac{m}{2} v^2$ . Pour une particule ponctuelle, plus sa masse  $m$  est grande, plus son énergie cinétique est grande. Pour un objet rigide et indéformable, plus son moment d'inertie  $I_z$  est grand, plus son énergie cinétique est grande.

#### 4.1.2 Mouvement général dans le plan

On reprend maintenant le mouvement général décrit à la Fig. 4.1, où l'axe de rotation n'est *pas* fixe. Si l'on considère alors le mouvement d'un élément infinitésimal  $dm$  de l'objet, celui-ci ne décrit *pas* un cercle autour de l'origine, et donc sa vitesse  $v \neq \omega r$ . Il faut donc utiliser une astuce afin de calculer le moment et l'énergie cinétique de l'objet. Celle-ci consiste à exprimer  $\mathbf{L}$  et  $T$  en terme des coordonnées du centre de masse et des coordonnées relatives.

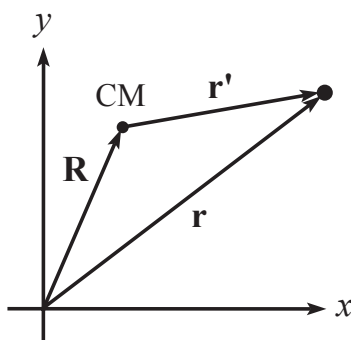


FIGURE 4.3

Soit  $\mathbf{R} = (X, Y)$  la coordonnée du CM par rapport à l'origine du repère, qui est elle *fixe*. Soit  $\mathbf{r}' = (x', y')$  la coordonnée relative au CM (voir Fig. 4.3). La coordonnée d'un élément de masse  $dm$  de l'objet par rapport à l'origine est donc donnée par

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (4.15)$$

et sa vitesse se décompose en

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  est la vitesse du CM, et  $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  la vitesse relative.

Soit  $\omega'$  la vitesse angulaire autour du CM, c'est-à-dire, autour d'un axe instantané de rotation parallèle à  $z$ , de telle sorte que l'objet reste dans le plan ( $Oxy$ ). On a alors  $v' = \omega' r'$ , puisque  $dm$  a un mouvement circulaire *par rapport à cet axe*. Nous sommes maintenant en mesure de calculer le moment cinétique total de l'objet, en utilisant les décompositions (4.15) et (4.16) :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int d\mathbf{L} \\ &= \int dm \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \int dm (\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}') \\ &= \int dm (\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' + \mathbf{R} \times \mathbf{v}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Considérons d'abord le dernier terme de l'expression ci-dessus, qui peut s'écrire (puisque  $\mathbf{V}$  peut « sortir » de l'intégrale)

$$\begin{aligned} \int dm \mathbf{r}' \times \mathbf{V} &= \left[ \int dm \mathbf{r}' \right] \times \mathbf{V} \\ &= \left[ \int dm (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \times \mathbf{V} \end{aligned} \quad (4.18)$$

d'après l'Eq. (4.15). Or on a

$$\int dm (\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \int dm \mathbf{r} - \left( \int dm \right) \mathbf{R}. \quad (4.19)$$

Puisque la masse totale de l'objet est donnée par

$$M = \int dm, \quad (4.20)$$

et que son CM est localisé à la position

$$\mathbf{R} = \frac{\int dm \mathbf{r}}{M}, \quad (4.21)$$

on a donc

$$\int dm (\mathbf{r} - \mathbf{R}) = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

et donc l'Eq. (4.18) donne

$$\int dm \mathbf{r}' \times \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

de sorte que le dernier terme de l'Eq. (4.17) est nul.

On considère maintenant le troisième terme de l'Eq. (4.17), et nous allons démontrer que celui-ci est, de même, également nul :

$$\begin{aligned} \int dm \mathbf{R} \times \mathbf{v}' &= \mathbf{R} \times \int dm \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{R} \times \int dm \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \\ &= \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \int dm \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Or, comme nous l'avons démontré pour le quatrième terme de l'Eq. (4.17),  $\int dm \mathbf{r}' = 0$ , de sorte que le troisième terme de l'Eq. (4.17) est également nul,

$$\int dm \mathbf{R} \times \mathbf{v}' = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int dm (\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{r}' \times \mathbf{v}') \\ &= M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \int dm r' v' \hat{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{R} \times (M\mathbf{V}) + \int dm r' (\omega' r') \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

D'où

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + I_z^{\text{CM}} \omega' \hat{\mathbf{z}}}, \quad (4.27)$$

avec  $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$  la quantité de mouvement du CM, et

$$I_z^{\text{CM}} = \int dm r'^2 \quad (4.28)$$

le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à l'axe  $z$  et passant par le CM.

La démonstration de l'Eq. (4.27) ci-dessus nous permet donc d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.1 (1<sup>er</sup> Théorème de König) :** *Le moment cinétique d'un corps rigide et indéformable par rapport à l'origine peut être déterminé en traitant le système comme une particule ponctuelle localisée au centre de masse et de masse  $M$ , et en calculant le moment cinétique de cette particule par rapport à l'origine, et en ajoutant le moment cinétique du corps rigide en rotation par rapport au centre de masse.*

On cherche maintenant à déterminer l'énergie cinétique correspondant au mouvement général du corps solide décrit dans la Fig. 4.1. On a

$$\begin{aligned} T &= \int dT \\ &= \int dm \frac{\mathbf{v}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int dm |\mathbf{V} + \mathbf{v}'|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int dm (V^2 + v'^2 + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}') \\ &= \frac{M}{2} V^2 + \frac{1}{2} \int dm (\omega' r')^2 + \mathbf{V} \cdot \int dm \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Or comme  $\int dm \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ , on obtient finalement que

$$\boxed{T = \frac{M}{2} V^2 + \frac{I_z^{\text{CM}}}{2} \omega'^2}, \quad (4.30)$$

c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'objet se décompose comme une *énergie cinétique de translation* (1<sup>er</sup> terme de l'équation ci-dessus) et une *énergie cinétique de rotation* (2<sup>e</sup> terme). On en déduit donc le théorème suivant (que nous avons déjà vu dans le § 3.5.2) :

**Théorème 4.2 (2<sup>e</sup> Théorème de König) :** *L'énergie cinétique d'un corps rigide et indéformable peut être déterminée en traitant le corps comme une masse ponctuelle  $M$  localisée au centre de*

masse, et en y rajoutant l'énergie cinétique du corps par rapport au centre de masse.

Avec les outils que nous avons désormais en main, nous pouvons aborder l'exemple suivant :

**Exemple :** Une pièce de monnaie (supposée strictement bidimensionnelle), homogène, de masse  $m$ , de rayon  $r$ , et de moment d'inertie  $I = \frac{1}{2}mr^2$  par rapport au CM (cf. TD 4) roule *sans glisser* le long d'un plan incliné faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale. On cherche à déterminer l'accélération du CM de la pièce.

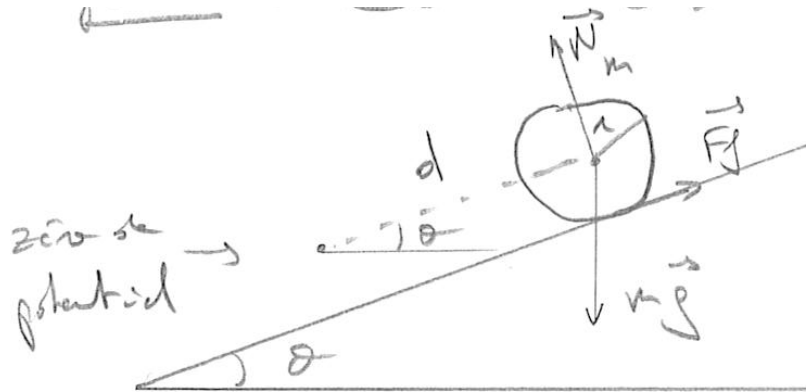


FIGURE 4.4

On considère, comme sur la Fig. 4.4, que la pièce de monnaie dévale une distance  $d$  le long du plan incliné, en partant du repos. Pour résoudre ce problème simple, on peut utiliser la conservation de l'énergie (cf. Ch. 3).<sup>10</sup> Initialement, la pièce n'a pas d'énergie cinétique et a une énergie potentielle égale à  $mg \cdot d \sin \theta$ . Lorsque la pièce a parcouru la distance  $d$ , elle a une énergie potentielle nulle (puisque l'on prend le zéro de potentiel à cette altitude). Son énergie cinétique, d'après l'Eq. (4.30), se décompose en l'énergie cinétique associée au CM de la pièce ( $mv^2/2$ , où  $v$  est la vitesse du CM) et en son énergie cinétique de rotation par rapport au CM ( $I\omega^2/2$ ). On a donc

$$0 + mgd \sin \theta = \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2. \quad (4.31)$$

L'équation ci-dessus possède deux inconnues ( $v$  et  $\omega$ ), mais nous n'avons pour le moment qu'une équation. Or nous allons démontrer que ces deux quantités sont reliées par la contrainte qui est que la pièce de monnaie roule le long du plan incliné sans glisser. Cela est rendu possible par la force de friction  $\mathbf{F}_f$  entre la pièce et le plan (voir Fig. 4.4) qui est suffisante afin que la pièce ne glisse pas.

### Intermezzo (important!) : roulement sans glissement

Considérons dans un premier temps la situation de la Fig. 4.5 : Un disque de rayon  $R$  roule avec une vitesse angulaire  $\omega$  sans glisser sur une surface dont la friction est suffisante pour que

10. C'est la force de frottement, a priori non conservative comme nous l'avons vu dans le Ch. 3, qui est à l'origine du fait que la pièce peut rouler sans glisser. Or nous utilisons la conservation de l'énergie pour résoudre le problème, ce qui semble contradictoire.

En réalité, comme la pièce de monnaie ne glisse pas, son point de contact avec le plan est pour un temps infinitésimal en contact avec celui-ci. Ce point de contact est donc au repos et la roue tourne autour de ce point. En conséquence, la force de frottement associée est statique, et non pas cinétique. De ce fait, il n'y a aucun travail associé à cette force, et l'énergie mécanique est donc conservée. En d'autres termes, il n'y a pas de puissance dissipée entre la pièce de monnaie et le plan incliné, et inversement bien sûr, puisque la vitesse de glissement pièce/plan est nulle.

Bien sûr, ceci est une idéalisation du système, qui vient du fait que l'on considère dans ce cours uniquement des corps rigides et indéformables, ce qui est une bonne approximation pour, par exemple, une pièce d'or roulant sur un plan incliné en marbre. En revanche, pour un pneu de vélo roulant sur une route, cela serait totalement différent, puisque le pneu se déforme lorsqu'il roule, et donc entraîne une dissipation de l'énergie, et donc une résistance au roulement.

cela puisse être possible. Si le point de contact  $C$  que fait le disque avec le sol fait un tour complet, et puisqu'il n'y a pas de glissement, la distance  $x$  parcourue par le CM du disque est égale au périmètre du disque, c'est-à-dire  $x = 2\pi R$ .

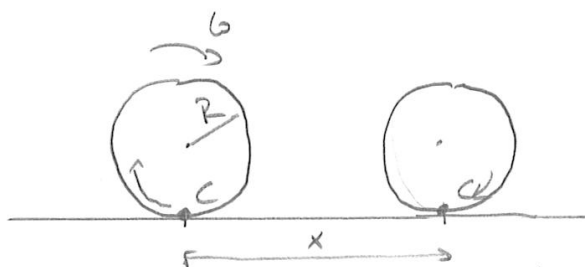


FIGURE 4.5

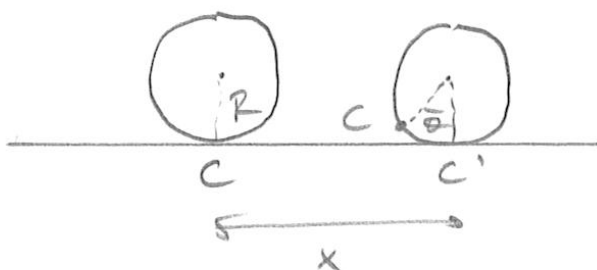


FIGURE 4.6

Si maintenant  $C$  parcourt une distance telle qu'il fait un angle  $\theta$  avec la verticale, comme sur la Fig. 4.6, la distance parcourue par le CM est l'arc de cercle  $x = \theta R$ . La vitesse du CM est donc  $V = \dot{\theta}R$ . Puisque  $\dot{\theta} = \omega$ , on en conclue donc que **pour un roulement sans glissement**, on a

$$\boxed{V = \omega R.} \quad (4.32)$$

On peut maintenant reprendre l'exemple précédent, où dans l'Eq. (4.31),  $\omega = v/r$  d'après l'Eq. (4.32), et en utilisant le fait que  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , de sorte que

$$\begin{aligned} mgd \sin \theta &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}mr^2 \right) \left( \frac{v}{r} \right)^2 \\ &= \frac{3}{4}mv^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

On en déduit donc que

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gd \sin \theta}. \quad (4.34)$$

On remarque sur l'équation précédente que  $v = 0$  pour  $\theta = 0$  (bien évidemment!), et que  $v = v_{\max} = \sqrt{4gd/3}$  pour  $\theta = \pi/2$ . On remarque également que si la pièce de monnaie était considérée comme ponctuelle, c'est-à-dire sans énergie cinétique de rotation, on aurait à la place de l'Eq. (4.31) pour la conservation de l'énergie

$$0 + mgd \sin \theta = \frac{m}{2}v_p^2 + 0 \quad (4.35)$$

avec  $v_p$  la vitesse de la particule ponctuelle. D'où  $v_p = \sqrt{2gd \sin \theta} > v$ . Ce résultat s'explique par le fait que de l'énergie cinétique pour la pièce de monnaie est « perdue » dans la rotation, et donc sa vitesse est moindre que pour une particule ponctuelle.

On cherche maintenant à déduire de l'Eq. (4.34) l'accélération de la pièce de monnaie. On remarque que l'on a à faire à un mouvement à accélération constante, puisque la somme des forces qui s'exercent sur la pièce est constante (tant qu'elle ne quitte pas le plan incliné). En intégrant par rapport au temps une fois, et compte tenu des conditions initiales, la vitesse  $v$  et l'accélération  $a$  du CM sont donc reliées par la relation  $v = at$ . En intégrant encore une fois, on a donc  $d = at^2/2$ . On en déduit que  $t^2 = 2d/a$ . D'où  $v^2 = (at)^2 = a^2 \frac{2d}{a}$  et donc  $v^2 = 2da$ . On a donc finalement avec l'Eq. (4.34)

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta. \quad (4.36)$$

### 4.1.3 Théorème des axes parallèles (Huygens–Steiner)

Considérons le cas spécifique où le CM tourne autour de l'origine du repère avec la même vitesse angulaire  $\omega$  que l'objet autour du CM. Comme le montre la Fig. 4.7, tout se passe comme si l'on avait collé un bâton à l'objet, et que ce dernier pivote autour de l'origine avec la vitesse angulaire  $\omega$ . Dans ce cas simplifié, tous les points qui compose l'objet décrivent un cercle par rapport à l'origine. La vitesse du CM est donc  $V = R\omega$ , où  $R$  est la distance entre l'origine et le CM.

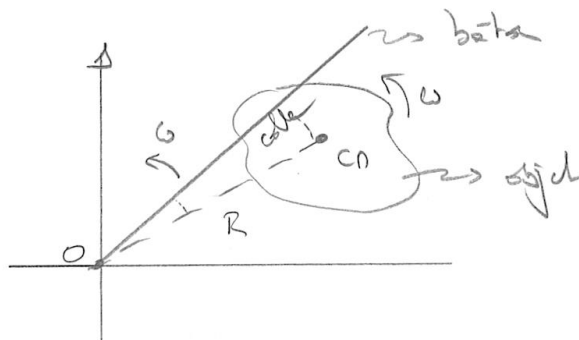


FIGURE 4.7

D'après le Théorème 4.1 [cf. Eq. (4.27)], on a donc pour le moment cinétique de l'objet

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{R} \times \mathbf{P} + I_z^{\text{CM}} \omega \hat{\mathbf{z}} \\ &= [R \cdot M(R\omega) + I_z^{\text{CM}} \omega] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

et donc

$$L_z = (MR^2 + I_z^{\text{CM}}) \omega = I_z \omega, \quad (4.38)$$

avec

$$\boxed{I_z = MR^2 + I_z^{\text{CM}}}, \quad (4.39)$$

qui constitue le **théorème des axes parallèles** (ou théorème de Huygens–Steiner), et qui stipule la chose suivante :

*Le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe perpendiculaire passant par le CM est égal à  $I_z^{\text{CM}} + M \times (\text{distance entre les axes})^2$ .*

On notera que ce théorème est également valide pour des objets non-planaires (cf. la suite du cours).

Quelle est l'énergie cinétique de l'objet dans le cas particulier représenté à la Fig. 4.7 ?

D'après le Théorème 4.2 [cf. Eq. (4.30)], on a

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{M}{2}V^2 + \frac{I_z^{\text{CM}}}{2}\omega^2 \\
 &= \frac{M}{2}(R\omega)^2 + \frac{I_z^{\text{CM}}}{2}\omega^2 \\
 &= \frac{1}{2}(MR^2 + I_z^{\text{CM}})\omega^2 \\
 &= \frac{1}{2}I_z\omega^2,
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

où  $I_z$  est donné à l'Eq. (4.39).

**Exemple :** On considère une tige de masse  $m$ , de longueur  $\ell$ , et de densité linéique de masse uniforme  $\rho = m/\ell$ . On cherche à calculer le moment d'inertie de la tige par rapport à  $O$  (voir Fig. 4.8) de deux façons différentes : (i) par un calcul direct et (ii) en utilisant le théorème de Huygens–Steiner.

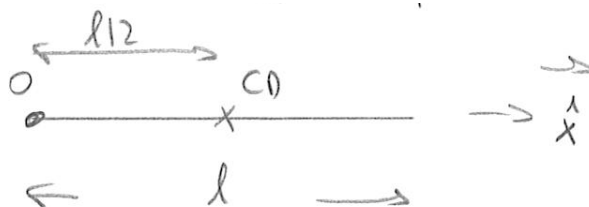


FIGURE 4.8

(i) Le calcul direct nous donne pour le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par  $O$  :

$$I_O = \int dm x^2 = \int_0^\ell \rho dx x^2 = \rho \frac{\ell^3}{3} = \left(\frac{m}{\ell}\right) \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}, \tag{4.41}$$

où l'on a pris l'origine de l'axe des  $x$  en  $O$ .

(ii) Afin d'appliquer le théorème de Huygens–Steiner, calculons d'abord le moment d'inertie par rapport au CM. Pour ce faire, on place désormais l'origine de l'axe des  $x$  au CM, et on a donc

$$I_{\text{CM}} = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \rho dx x^2 = 2\rho \int_0^{\ell/2} dx x^2 = 2\rho \frac{1}{3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 = \frac{\rho\ell^3}{12} = \frac{m\ell^2}{12}. \tag{4.42}$$

On applique maintenant le théorème des axes parallèles afin d'obtenir

$$I_O = I_{\text{CM}} + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}, \tag{4.43}$$

ce qui donne évidemment le même résultat que le calcul direct (i).

## 4.2 Objets non-planaires

Dans le § 4.1, nous nous sommes restreints à des objets planaires dans le plan ( $Oxy$ ). Cependant, tous les résultats que nous avons vus se généralisent sans difficulté au cas d'objets non-planaires, à condition que l'axe de rotation soit selon  $z$ , et que l'on s'intéresse uniquement au moment cinétique  $L_z$  selon  $z$ .

Considérons un objet non-planaire en rotation autour de l'axe fixe  $z$ , comme le montre la Fig. 4.9. On découpe alors l'objet en tranches d'épaisseur infinitésimale parallèles au plan ( $Oxy$ ).

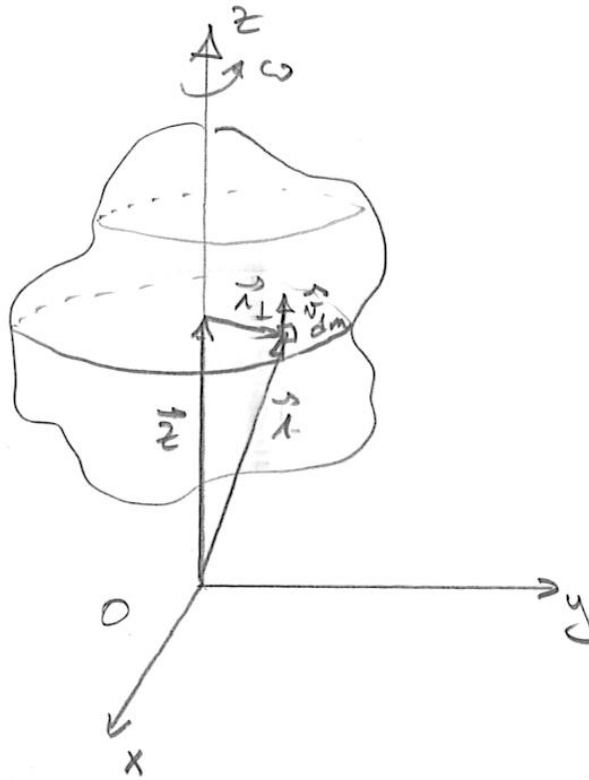


FIGURE 4.9

Le moment cinétique d'un élément infinitésimal de masse  $dm$  dans une tranche donnée est alors

$$d\mathbf{L} = dm \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (4.44)$$

avec  $\mathbf{v} \in (xy)$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{z} + \mathbf{r}_\perp$ , où  $\mathbf{r}_\perp$  est **perpendiculaire à l'axe de rotation**, et où  $\mathbf{z}$  est le vecteur selon  $z$  (voir Fig. 4.9). En projetant l'Eq. (4.44) selon  $z$ , on obtient

$$dL_z = d\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}} = dm [(\mathbf{z} + \mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{z}} = dm [(\mathbf{z} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}} + (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}}]. \quad (4.45)$$

En ce qui concerne le 1<sup>er</sup> terme dans le membre de droite de l'équation ci-dessus, on remarque que le vecteur  $\mathbf{z} \times \mathbf{v}$  appartient au plan  $xy$ , et est donc perpendiculaire à l'axe  $z$ , de sorte que  $(\mathbf{z} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ . En ce qui concerne le 2<sup>e</sup> terme, on a  $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v} = r_\perp v \hat{\mathbf{z}} = r_\perp (\omega r_\perp) \hat{\mathbf{z}} = \omega r_\perp^2 \hat{\mathbf{z}}$  (puisque  $v = \omega r_\perp$  du fait du mouvement circulaire de  $dm$  autour de l'axe  $z$ ), et donc

$$dL_z = dm \omega r_\perp^2. \quad (4.46)$$

En intégrant le résultat ci-dessus sur tout l'objet, on a alors

$$\boxed{L_z = I_z \omega} \quad (4.47)$$

avec

$$\boxed{I_z = \int dm r_\perp^2}. \quad (4.48)$$

On cherche maintenant à déterminer l'énergie cinétique du système de la Fig. 4.9. L'élément  $dm$  a pour énergie cinétique

$$dT = \frac{dm}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{dm}{2} \left[ \frac{d}{dt} (\mathbf{z} + \mathbf{r}_\perp) \right]^2 = \frac{dm}{2} (\dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{r}}_\perp)^2. \quad (4.49)$$



Or  $\dot{\mathbf{z}} = 0$ , et donc

$$dT = \frac{dm}{2} \dot{r}_\perp^2 = \frac{dm}{2} (r_\perp \omega)^2. \quad (4.50)$$

En intégrant sur tout l'objet, on obtient donc

$$T = \frac{I_z}{2} \omega^2. \quad (4.51)$$

On peut aussi montrer que si le CM de l'objet a un mouvement de translation et que l'objet a un mouvement de rotation autour d'un axe instantané de rotation passant par le CM (et dont la direction reste fixe), on a

$$L_z = (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{z}} + I_z^{\text{CM}} \omega' \quad (4.52)$$

et

$$T = \frac{M}{2} V^2 + \frac{I_z^{\text{CM}}}{2} \omega'^2, \quad (4.53)$$

où les notations sont les mêmes qu'au § 4.1.2.

Finalement, on peut montrer que le théorème des axes parallèles (cf. § 4.1.3) est aussi valable pour un objet non-planaire.

### 4.3 Moment d'une force

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, sous certaines conditions, la variation temporelle du moment cinétique  $\mathbf{L}$  est donnée par  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ , où  $\boldsymbol{\tau}$  est le moment des forces. Cette équation est le pendant « rotationnel » du PFD  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ .<sup>11</sup>

Il y a dans la suite deux choses cruciales à bien comprendre :

- la distinction entre forces internes et externes au solide ;
- la possibilité que l'origine des coordonnées par rapport à laquelle on calcule le moment cinétique et le moment des forces soit en accélération (par exemple, le CM du solide indéformable en mouvement).

#### 4.3.1 Particule ponctuelle, origine du repère fixe

Commençons par nous concentrer sur le problème simple d'une particule ponctuelle de masse  $m$ , et considérons son moment cinétique par rapport à l'origine fixe du repère (voir Fig. 4.10), qui est défini comme  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

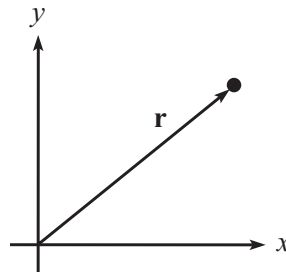


FIGURE 4.10

11. On remarquera que la démonstration de  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$  est ici totalement générale, et peut donc s'appliquer également au cas où la direction du moment cinétique varie au cours du temps. On ne se restreint donc pas dans la suite au cas où l'axe de rotation est parallèle à  $z$ .

Calculons maintenant la variation temporelle de  $\mathbf{L}$  :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4.54)$$

Dans le 1<sup>er</sup> terme du membre de droite de l'équation ci-dessus, on remplace  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  par la vitesse  $\mathbf{v}$  de la particule, et  $\mathbf{p}$  par la définition de la quantité de mouvement,  $m\mathbf{v}$ . En conséquence, on a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (4.55)$$

puisque le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. Pour de 2<sup>e</sup> terme de l'Eq. (4.54), on écrit le PFD  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ , où  $\mathbf{F}$  est la somme des forces agissant sur la particule. On définit le **moment des forces** par

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad (4.56)$$

et donc on a

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}. \quad (4.57)$$

**Remarque importante :** Attention ici à l'origine des coordonnées :  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  est défini par rapport au même point que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  ! Autrement dit, c'est le même  $\mathbf{r}$  dans les deux équations, et il faut veiller à ce que cela soit bien le cas quand on applique l'Eq. (4.57).

### 4.3.2 Solide indéformable, origine du repère fixe

Pour un objet étendu, il existe des forces *internes* agissant sur les différents éléments (continus ou ponctuels) constituant l'objet, mais aussi des forces *externes*. Par exemple, pour une molécule de  $\text{H}_2\text{O}$ , il y a les forces internes entre les atomes qui maintiennent la molécule ensemble, et la force (externe) de gravitation à laquelle est soumise la molécule. La question que l'on se pose alors est comment discriminer ces différentes forces, ce que nous verrons dans la suite.

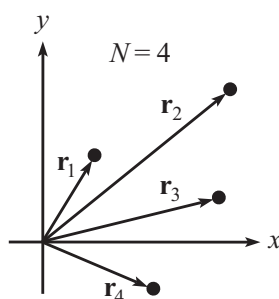


FIGURE 4.11

Considérons, comme sur la Fig. 4.11, un ensemble de  $N$  particules ponctuelles, labélisées par l'indice  $i = 1, \dots, N$  (dans la figure,  $N = 4$ ), et repérées par le vecteur position  $\mathbf{r}_i$ . Pour un objet continu, on substituera dans la suite la somme discrète sur  $i$  par une intégrale, selon la règle (4.4). Le moment cinétique total par rapport à l'origine *fixe* du repère s'écrit

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (4.58)$$

et donc

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right). \quad (4.59)$$

Or

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{0}, \quad (4.60)$$

et, d'après le PFD,

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{int}}, \quad (4.61)$$

où  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  représente la somme des forces externes exercées sur la particule  $i$ , et où  $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$  représente les forces internes exercées par toutes les autres particules  $j$  sur la particule  $i$  (avec  $j \neq i$ ). On a donc

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}. \quad (4.62)$$

Dans la suite, nous allons montrer que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \mathbf{0}, \quad (4.63)$$

ce qui semble physiquement raisonnable. En effet, un corps solide soumis à aucune force extérieure ne se met pas à tourner sur lui-même spontanément, sous l'effet des seules forces internes! La preuve de l'Eq. (4.63) repose sur

- une hypothèse : les forces internes sont à *deux corps et radiales* (elles ne dépendent que de la distance entre les particules et sont orientées selon la direction entre les deux particules) ;
- la 3<sup>e</sup> loi de Newton (principe d'action-réaction).

**Preuve de l'Eq. (4.63) :** On a

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} \right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}, \quad (4.64)$$

où  $\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$  est la force que la particule  $j$  exerce sur la particule  $i$ . Puisque les indices  $i$  et  $j$  sont muets dans la double somme du membre de droite de l'Eq. (4.64), on peut inverser ces deux indices ( $i \leftrightarrow j$ ), et obtenir l'égalité

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}, \quad (4.65)$$

où l'on a utilisé le principe d'action-réaction ( $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$ ) afin d'obtenir la dernière égalité. En additionnant les Eqs. (4.64) et (4.65), on a donc

$$2 \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}. \quad (4.66)$$

Or si l'on suppose que  $\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$  est colinéaire au vecteur  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,<sup>12</sup> i.e., les forces internes sont radiales, on a

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = \mathbf{0}, \quad (4.67)$$

et donc, d'après l'Eq. (4.66), l'Eq. (4.63) est vérifiée, ce qui conclut la preuve.

Si l'on en revient maintenant à l'Eq. (4.62), nous obtenons donc que

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}} \quad (4.68)$$

la somme des moments des forces *externes* qui s'exercent sur la particule  $i$ .

12. Faire un schéma pour s'en convaincre!

### 4.3.3 Solide indéformable, origine du repère en mouvement

Soit  $\mathbf{r}_0$  l'origine par rapport à laquelle on cherche à déterminer la variation temporelle du moment cinétique  $\mathbf{L}$ . Dans la suite,  $\mathbf{r}_0$  peut être en mouvement (accélééré) ou non. On analyse donc le cas totalement général.

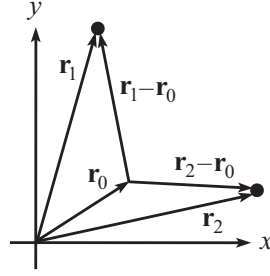


FIGURE 4.12

Le moment cinétique total par rapport à  $\mathbf{r}_0$  est donné par (cf. Fig. 4.12)

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times [m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0)]. \quad (4.69)$$

On a donc

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) \times [m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0)] + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times [m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i - \ddot{\mathbf{r}}_0)]. \quad (4.70)$$

Le 1<sup>er</sup> terme dans le membre de droite de l'équation ci-dessus est évidemment nul (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires), et on utilise le PFD afin de réexprimer le 2<sup>e</sup> terme ( $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{int}}$ ) :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{int}} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_0). \quad (4.71)$$

Or

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^N \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} \right) = \mathbf{r}_0 \times \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (4.72)$$

où l'on a utilisé la 3<sup>e</sup> loi de Newton ( $\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ ) afin de montrer que la somme sur  $i$  et  $j$  de la force interne que la particule  $j$  exerce sur  $i$ ,  $\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$ , est nulle. De plus, grâce à l'Eq. (4.63), on a donc

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \mathbf{0}, \quad (4.73)$$

c'est-à-dire que les forces internes au solide n'exercent aucun couple sur celui-ci.

On obtient alors pour l'Eq. (4.71)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} - \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \sum_{i=1}^N m_i \right) \times \ddot{\mathbf{r}}_0. \quad (4.74)$$

En utilisant ensuite la définition de la position  $\mathbf{R}$  du CM,  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R}$  et  $\sum_{i=1}^N m_i = M$ , on a

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \ddot{\mathbf{r}}_0. \quad (4.75)$$

Le 1<sup>er</sup> terme dans le membre de droite de l'équation ci-dessus représente le moment des forces externes par rapport à  $\mathbf{r}_0$  de l'objet. Le 2<sup>e</sup> terme est en quelque sorte « indésirable » pour effectuer un calcul pratique, mais il est en fait nul dans les trois cas suivant :

1. si  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}$ , c'est-à-dire que l'on prend le CM de l'objet comme origine (en mouvement), ce que l'on fait souvent en pratique ;
2. si  $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire que l'origine par rapport à laquelle on calcule le moment cinétique n'est pas accélérée ;
3. si les vecteurs  $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_0$  sont colinéaires, ce qui est plus rarement le cas.

Si l'une des trois conditions ci-dessus est remplie, on obtient donc le résultat

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}},} \quad (4.76)$$

i.e., le moment des forces externes donne la variation temporelle du moment cinétique.

On peut immédiatement déduire du résultat ci-dessus le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3 :** *Si le moment total des forces externes exercé sur un objet est nul, alors son moment cinétique est conservé.*<sup>13</sup> *En particulier, le moment cinétique d'un objet isolé est conservé.*

On remarquera que c'est en quelque sorte la réciproque à ce corollaire que nous avons utilisé à répétition dans le Ch. 1 de ce cours (cf. § 1.2) : si un objet étendu est statique, alors la somme des moments des forces qui s'exercent sur celui-ci est nulle.

Jusqu'à présent dans ce paragraphe, tout est valable pour un mouvement arbitraire. Les particules peuvent bouger les unes par rapport aux autres, et les différents  $\mathbf{L}_i$  peuvent pointer dans des directions différentes. On restreint maintenant le mouvement à celui considéré dans ce chapitre, c'est-à-dire que  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{z}}$ , i.e., la direction du moment cinétique est fixée selon l'axe  $z$ . On a donc

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \hat{\mathbf{L}}) = \frac{dL}{dt} \hat{\mathbf{L}} + L \underbrace{\frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt}}_{=0} = \frac{dL}{dt} \hat{\mathbf{L}}. \quad (4.77)$$

Si, de plus, nous considérons un corps *rigide* (pour lequel les distances entre les particules qui le composent sont fixes) soumis à une rotation pure autour d'un point donné, on a alors  $L = I\omega$ , et donc

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha, \quad (4.78)$$

avec

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \quad (4.79)$$

l'**accélération angulaire**. L'Eq. (4.76) se traduit alors dans ce cas simple en

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = I\alpha \hat{\mathbf{L}},} \quad (4.80)$$

avec  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  la somme des moments des forces extérieures qui s'appliquent à l'objet.

**Exemple :** Une corde est enroulée autour d'un cylindre de densité de masse uniforme de masse totale  $M$ , et de rayon  $R$ . Le cylindre se situe sur un plan incliné qui fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale, et est connecté à une masse  $m$  via une poulie sans masse, comme le montre la Fig. 4.13. On suppose que le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné, et que la corde est parallèle à ce dernier. La question est de déterminer l'accélération de la masse  $m$ .

13. i.e., il ne dépend pas du temps

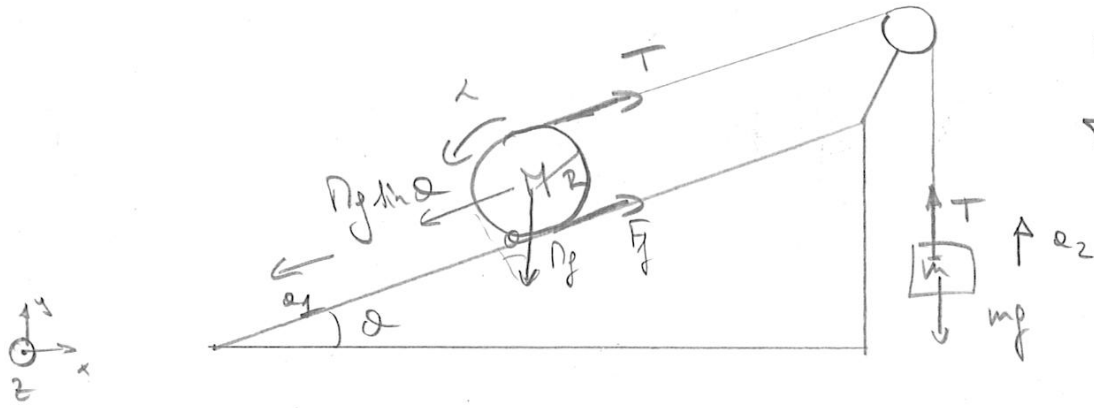


FIGURE 4.13

On définit les accélérations  $a_1$  (accélération du CM du cylindre),  $a_2$  (accélération de la masse  $m$ ), et  $\alpha = d\omega/dt$  (accélération angulaire du cylindre) positives comme indiqué comme sur le schéma de la Fig. 4.13. Les inconnues du problème sont :  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$ , la tension  $T$  dans la corde (supposée sans masse), et la force de friction  $F_f$  entre le cylindre et le plan incliné (qui fait que le cylindre roule sans glisser). Il nous faut donc cinq équations :

1. PFD sur  $m$  :

$$ma_2 = T - mg. \quad (4.81)$$

2. PFD sur  $M$  :

$$Ma_1 = Mg \sin \theta - T - F_f. \quad (4.82)$$

3. Équation (4.80) sur  $M$  : on calcule le moment des forces par rapport au CM du cylindre (on utilise la règle du tire-bouchon de la main droite pour déterminer la direction du couple et du moment cinétique). On obtient donc

$$(F_f R - TR) \hat{z} = I \alpha \hat{z}. \quad (4.83)$$

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe instantané de rotation passant par son CM étant  $I = MR^2/2$  (faites le calcul pour vous en convaincre!), on obtient donc

$$F_f - T = \frac{MR}{2} \alpha. \quad (4.84)$$

4. Le cylindre roule le long du plan incliné sans glisser. Sa vitesse  $v_1$  est donc liée à  $\omega$  par la relation  $v_1 = R\omega$ . On a donc  $a_1 = dv_1/dt = R d\omega/dt$ , i.e.,

$$a_1 = R\alpha. \quad (4.85)$$

5. Il y a une contrainte supplémentaire qui va nous permettre de déterminer la 5<sup>e</sup> équation. En effet, la longueur de la corde, supposée inextensible, est constante. Puisque le cylindre roule sans glisser le long du plan incliné, lorsque le point de contact  $C$  a fait un angle  $\theta$  avec la verticale à force de rouler, le CM du cylindre a parcouru la distance  $x = R\theta$  (voir Fig. 4.14). De ce fait, la vitesse du CM est  $v = R\dot{\theta} = R\omega$ , comme nous l'avons vu précédemment. La conservation de la longueur de la corde impose alors que le point  $C'$  se situant à  $180^\circ$  de  $C$  sur le cylindre (voir la figure) a parcouru lui la distance  $x' = R\theta \times 2$ . Sa vitesse est donc  $v' = 2v$ , et donc les accélérations du cylindre et de la masse  $m$  sont reliées par la relation

$$a_2 = 2a_1. \quad (4.86)$$

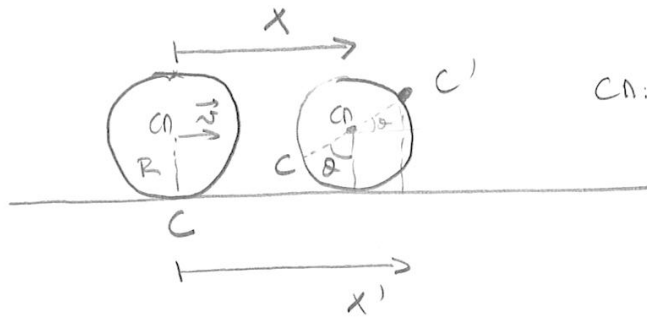


FIGURE 4.14

Trois des équations obtenues ci-dessus contiennent seulement deux inconnues, il est donc facile de résoudre le système. Les équations 3. et 4. donnent

$$F_f - T = \frac{Ma_1}{2}. \quad (4.87)$$

En additionnant cette équation à 2., on obtient donc

$$Mg \sin \theta - 2T = \frac{3Ma_1}{2}. \quad (4.88)$$

En utilisant 1. pour éliminer  $T$ , et 5. afin d'écrire  $a_1$  en terme de  $a_2$ , on a donc

$$Mg \sin \theta - 2(mg + ma_2) = \frac{3Ma_2}{4} \Leftrightarrow a_2 = \frac{M \sin \theta - 2m}{3M/4 + 2m}g \quad (4.89)$$

et  $a_1 = a_2/2$ . On remarque donc que  $a_1$  est positif (c'est-à-dire que le cylindre roule vers le bas du plan incliné) lorsque  $M/m > 2/\sin \theta$ . Si  $\theta \rightarrow 0$ , ceci donne alors  $M/m \rightarrow \infty$ , ce qui semble avoir du sens.<sup>14</sup>

#### 4.4 Collisions

Au § 3.6, nous avons considéré des collisions (élastiques, i.e., sans perte d'énergie) entre objets ponctuels (ou du moins, non tournants). Les deux ingrédients que nous avons utilisés sont la conservation de l'énergie<sup>15</sup> et de la quantité de mouvement.<sup>16</sup> Dans ce paragraphe, la conservation du moment cinétique va nous permettre d'envisager des problèmes plus complexes, où les objets peuvent tourner.

Comme nous l'avons vu au Corollaire 4.3, le moment cinétique est conservé (i.e., constant dans le temps) si la somme des moments des forces externes qui s'exercent sur l'objet est nulle, c'est-à-dire pour un système isolé. Remarquons qu'il faut pour pouvoir utiliser le Corollaire 4.3 bien choisir l'origine par rapport à laquelle on calcule le moment cinétique et le moment des forces. En effet, il faut que ce point corresponde soit au CM du système total, soit à un point fixe (ou à vitesse constante). Si l'on choisit en revanche un point accéléré comme origine pour

14. Remarquons que l'exemple ci-dessus pourrait également être résolu en prenant un point fixe A comme référence pour calculer le moment des forces. Le choix le plus judicieux est de prendre A le long du plan incliné. De ce fait, la force de friction ne produit pas de couple, alors que la force de gravitation  $Mg \sin \theta$  cette fois-ci a un moment de force associé. De plus, la tension a maintenant un bras de levier égal à  $2R$ . Le moment cinétique du cylindre par rapport à A est donné par  $L_A = I\omega + Mv_1R$ , où le second terme provient du fait que l'on traite le cylindre comme une masse ponctuelle localisée en son CM. On a donc  $dL_A/dt = I\alpha + Ma_1R$ , et l'équation  $\tau_A = dL_A/dt$  nous donne donc

$$(Mg \sin \theta)R - T(2R) = (MR^2/2)\alpha + Ma_1R,$$

ce qui correspond à l'équation 3. plus  $R$  fois l'équation 2. On obtient donc évidemment la même solution au problème!

15. qui n'est que valide si le choc est élastique

16. toujours valide si le système total est isolé

le calcul, la formule  $\dot{L} = \sum \tau$  ne s'applique pas, et donc le Corollaire 4.3 non plus !

**Exemple :** Une masse ponctuelle  $m$  se dirige perpendiculairement vers une tige de densité de masse homogène, de longueur  $l$  et de masse  $m$  avec une vitesse  $v_0$  (voir Fig. 4.15). La tige est initialement au repos. La question que l'on se pose est la suivante : à quelle hauteur  $h$  la particule ponctuelle doit-elle percuter (élastiquement) la tige afin que la particule et la tige se meuvent après la collision à des vitesses égales ?

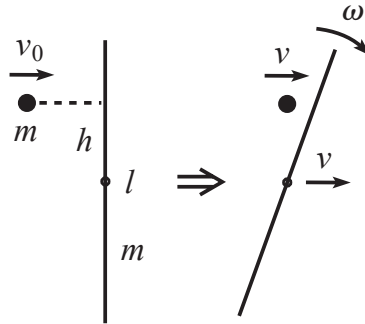


FIGURE 4.15

Il y a trois inconnues dans le problème : la hauteur  $h$ , la vitesse  $v$  de la particule et de la tige après le choc, et la vitesse angulaire de la tige  $\omega$  après le choc. Il nous faut donc trois équations :

1. Conservation de la quantité de mouvement :

$$mv_0 + 0 = mv + mv \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{2}. \quad (4.90)$$

2. Conservation de l'énergie :

$$\frac{m}{2}v_0^2 + 0 = \frac{m}{2}v^2 + \left( \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 \right), \quad (4.91)$$

où dans le membre de droite de l'équation ci-dessus, le 1<sup>er</sup> terme correspond à l'énergie de la particule, et le terme entre parenthèses à l'énergie de la tige, qui se décompose en énergie cinétique de translation et énergie cinétique de rotation autour du CM (cf. Théorème 4.2). Ici,  $I = ml^2/12$  est le moment d'inertie de la tige par rapport à son CM. En utilisation l'Eq. (4.90) et l'expression de  $I$ , l'Eq. (4.91) nous donne alors une expression pour  $\omega$ ,

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{v_0}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{v_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{6}v_0}{l} \quad (4.92)$$

3. Afin de déterminer  $h$ , on utilise maintenant la conservation du moment cinétique total  $L$ . La question est de savoir alors par rapport à quel point nous allons calculer  $L$ . Il faut pour cela faire bien attention, car le CM du système *total* (particule + tige) ne correspond pas au CM de la tige, et il est difficile de déterminer le CM du système total. On va donc plutôt utiliser un point fixe. On choisit pour ce dernier le point qui correspond au centre de la tige avant la collision. On écrit alors, puisque le moment cinétique total est conservé,  $L_{\text{juste avant la collision}} = L_{\text{juste après la collision}}$ , ce qui se traduit en

$$h \cdot mv_0 = h \cdot mv + I\omega + 0. \quad (4.93)$$

On notera qu'il n'y a pas de contribution du CM de la tige dans l'équation ci-dessus, puisque celui-ci n'a bougé que d'une distance infinitésimale. On a donc, en utilisant 2.,

$$hmv_0 = hmv + \frac{ml^2}{12} \cdot \frac{\sqrt{6}v_0}{l} \Leftrightarrow h = \frac{l}{\sqrt{6}} \simeq 0.41 \times l \quad (4.94)$$



## 5 NOTIONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Jusqu'à présent dans ce cours (ainsi que dans votre cours de mécanique de 1<sup>re</sup> année), nous n'avons finalement utilisé qu'un seul grand principe de la physique classique, le Principe Fondamentale de la Dynamique ( $\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = d\mathbf{p}/dt$ ), ainsi que les deux autres lois de Newton. Ces trois lois nous ont permis de résoudre un très grand nombre de problèmes de mécanique donnés, allant de la mécanique des particules ponctuelles jusqu'à celle des corps rigides et indéformables.

Dans ce dernier chapitre du cours, nous allons découvrir une nouvelle méthode, bien supérieure au PFD pour résoudre un problème mécanique donné (même si vous ne vous en rendez pas forcément compte, étant donné le temps imparti), et de plus qui est indispensable pour comprendre la physique moderne (notamment la mécanique quantique et la physique statistique) : c'est la *mécanique lagrangienne*.<sup>17</sup>

Nous aborderons ce chapitre par simplement énoncer cette nouvelle méthode, sans justification, et l'appliquerons à divers exemples. Nous « justifierons » cette méthode en montrant qu'elle est équivalente au PFD, du moins en coordonnées cartésiennes.

Soient  $T$  et  $V$  les énergies cinétique et potentielle d'un système donné. On définit le **lagrangien** du système par<sup>18</sup>

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V.} \quad (5.1)$$

On portera attention au signe  $-$  entre  $T$  et  $V$  ; en effet, s'il s'agissait d'un  $+$ , ce serait l'énergie du système!<sup>19</sup>

**Exemple :** Considérons une masse ponctuelle  $m$  attaché à un ressort de longueur au repos  $x = 0$  et de constante de raideur  $k$ . Son énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (5.2)$$

avec  $\dot{x} = dx/dt$ , et son énergie potentielle par

$$V = \frac{k}{2} x^2. \quad (5.3)$$

Le lagrangien de ce système est donc

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad (5.4)$$

qui est une fonction multivariée des variables  $x$  et  $\dot{x}$ .

Écrivons maintenant l'**équation d'Euler-Lagrange** (EEL)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x},} \quad (5.5)$$

et qui sera démontrée l'an prochain pour celles et ceux d'entre vous qui continueraient d'étudier la physique, pour l'exemple ci-dessus.<sup>20</sup> On a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (5.6)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx, \quad (5.7)$$

---

17. Dénomination qui vient du mathématicien, astronome, et physicien, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), qui comme son nom ne l'indique pas, était d'origine italienne ! Il n'est bien sûr pas le seul à avoir développé cette théorie, mais c'est le nom qui a été retenue par l'Histoire.

18. On utilisera dans la suite la lettre caligraphiée  $\mathcal{L}$  et non pas  $L$  pour dénoter le lagrangien, afin de ne pas confondre avec le moment cinétique !

19. Bien entendu pour un système conservatif.

20. On fera bien attention lorsqu'on applique l'EEL à la différence entre dérivées *partielles* et *totales* !

et donc l'« équation du mouvement »

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (5.8)$$

Cette dernière est équivalente à celle que nous aurions obtenue en appliquant le PFD  $F = ma$ . En effet, masse fois accélération donne  $ma = m\ddot{x}$ , et la force est  $F = -kx$ .

**NB :** Si le problème implique plusieurs variables [ex. :  $r$  et  $\theta$  en coordonnées polaires, pour lequel on aurait un lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ ], il faut appliquer l'EEL à chacune des variables. Par exemple,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}. \quad (5.9)$$

Est-ce que la procédure décrite ci-dessus « marche » dans d'autres cas (dans le sens où elle donne le même résultat que le PFD)? C'est ce que nous allons voir dans les deux exemples suivants.

**Exemple plus général :** Considérons une particule ponctuelle de masse  $m$  à 1D soumise à un potentiel quelconque  $V(x)$ . Le lagrangien de cette particule s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x). \quad (5.10)$$

L'EEL (5.5) donne alors

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = F(x) \quad (5.11)$$

avec  $F(x) = -dV/dx$ , ce qui est bien équivalent au PFD. Remarquons sur cet exemple que le fait que le potentiel  $V(x)$  soit défini à une constante près ne change évidemment pas l'équation du mouvement.

**Exemple encore plus général :** Considérons une particule ponctuelle à 3D dans un potentiel  $V(x, y, z)$  en coordonnées *cartésiennes*. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (5.12)$$

avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , c'est-à-dire,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (5.13)$$

En appliquant les EEL pour les variables  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , on a donc

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5.14)$$

Ces trois équations scalaires sont équivalentes à l'équation vectorielle

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V, \quad (5.15)$$

et puisque  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , à

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (5.16)$$

qui est bien le PFD.

Grâce à cette exemple, nous avons démontré que les EEL sont équivalentes au PFD *en coordonnées cartésiennes*. La démonstration de cette équivalence pour d'autres systèmes de coordonnées quelconques est plus compliquée, et dans cette introduction à la mécanique lagrangienne, il faudra admettre cette équivalence.

Nous allons voir maintenant sur trois exemples plus concrets l'application des EEL à des cas de difficultés graduelles. Le 3<sup>e</sup> exemple devrait en principe vous convaincre de la supériorité de cette technique par rapport au PFD.

### Trois exemples plus concrets :

1/ **Pendule simple** : Considérons le pendule simple de la Fig. 5.1.

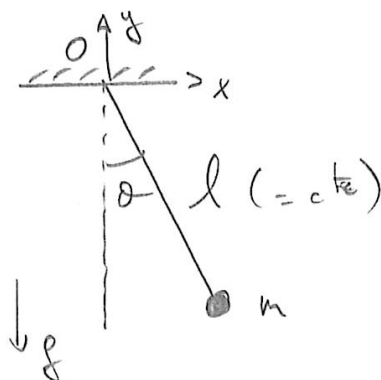


FIGURE 5.1

Afin de déterminer le lagrangien du système, commençons par exprimer les coordonnées du pendule  $x$  et  $y$  en fonction de la longueur du pendule  $\ell$  et de l'angle  $\theta$ . On remarquera que ce dernier est le seul degré de liberté du système. En effet, le pendule est à 2D, et il y a une contrainte ( $\ell = \text{constante}$ ), ce qui fait  $2 - 1 = 1$  degré de liberté. On a

$$\begin{cases} x = \ell \sin \theta, \\ y = -\ell \cos \theta. \end{cases} \quad (5.17)$$

Puisque l'énergie cinétique (qui rentre dans l'expression du lagrangien) nécessite le calcul de la vitesse (au carré) de la particule, calculons cette dernière. On a

$$\begin{cases} \dot{x} = \ell \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y} = \ell \dot{\theta} \sin \theta. \end{cases} \quad (5.18)$$

On obtient donc pour l'énergie cinétique l'expression

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2, \quad (5.19)$$

où l'on a bien sûr utilisé le fait que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Déterminons maintenant l'énergie potentielle du pendule. En prenant pour zéro de potentiel  $y = 0$ , on a

$$V = mgy = -mg\ell \cos \theta. \quad (5.20)$$

On a donc pour le lagrangien (5.1) du système

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta. \quad (5.21)$$

En appliquant l'EEL à la variable  $\theta$ , on obtient donc

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta}) = -mg\ell \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (5.22)$$

qui est bien l'équation du mouvement du pendule simple que nous aurions obtenue avec le PFD.

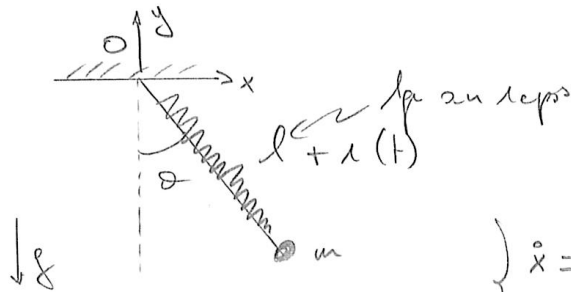


FIGURE 5.2

**2/ Pendule élastique :** On considère le pendule élastique de la Fig. 5.2 : une masse ponctuelle  $m$  accrochée à un ressort de longueur au repos  $\ell$  dans le champ de gravitation.

Soit  $r$  l'écart à l'équilibre selon la direction radiale par rapport à  $\ell$  de la masse, et  $\theta$  l'angle que fait le pendule élastique avec la verticale. On a pour la position de  $m$

$$\begin{cases} x = (\ell + r) \sin \theta, \\ y = -(\ell + r) \cos \theta, \end{cases} \quad (5.23)$$

et donc pour sa vitesse

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + (\ell + r) \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y} = -\dot{r} \cos \theta + (\ell + r) \dot{\theta} \sin \theta, \end{cases} \quad (5.24)$$

de sorte que l'énergie cinétique du pendule est donnée par

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (\ell + r)^2 \dot{\theta}^2], \quad (5.25)$$

alors que son énergie potentielle s'écrit

$$V = mgy + \frac{k}{2} r^2 = -mg(\ell + r) \cos \theta + \frac{k}{2} r^2. \quad (5.26)$$

Le lagrangien du système est donc

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (\ell + r)^2 \dot{\theta}^2] + mg(\ell + r) \cos \theta - \frac{k}{2} r^2. \quad (5.27)$$

On écrit maintenant les EEL pour les variables  $r$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m(\ell + r)\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - kr \\ &\Leftrightarrow m\ddot{r} - m(\ell + r)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - kr, \end{aligned} \quad (5.28)$$

qui correspond au PFD projeté selon la direction radiale, et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m[\ell + r]^2 \dot{\theta}) = -mg(\ell + r) \sin \theta \\ &\Leftrightarrow 2m(\ell + r)\dot{r}\dot{\theta} + m(\ell + r)^2 \ddot{\theta} = -mg(\ell + r) \sin \theta \\ &\Leftrightarrow m(\ell + r)\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = -mg \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.29)$$

qui correspond au PDF projeté selon la direction tangentielle au mouvement.

**3/ Pendule double :** On considère enfin comme 3<sup>e</sup> exemple d'application des EEL le pendule double de la Fig. 5.3 : un pendule simple de masse  $m_1$  et longueur  $\ell_1$  accroché à un 2<sup>e</sup> pendule de masse  $m_2$  et de longueur  $\ell_2$ .

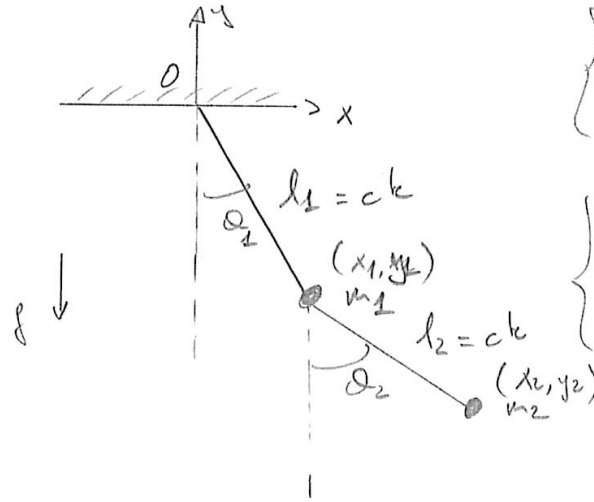


FIGURE 5.3

La position de  $m_1$  est donnée par

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1, \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \end{cases} \quad (5.30)$$

et celle de  $m_2$  par

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \\ y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \end{cases} \quad (5.31)$$

On a donc

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \\ \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \end{cases} \quad (5.32)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2. \end{cases} \quad (5.33)$$

L'énergie cinétique totale du système est donc donnée par  $T = T_1 + T_2$ , avec

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (5.34)$$

l'énergie cinétique de  $m_1$ , et celle de  $m_2$  donnée par

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2^2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \\ &= \frac{m_2}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

L'énergie potentielle totale du système est quant à elle donnée par

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Le lagrangien du système est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

On écrit maintenant l'EEL pour la variable  $\theta_1$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}, \quad (5.38)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \left( (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1,$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \left[ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1 = 0. \quad (5.39)$$

Pour la variable  $\theta_2$ , l'EEL s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}, \quad (5.40)$$

et obtient de même que pour  $\theta_1$  l'équation du mouvement

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \ell_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (5.41)$$

On remarque sur les exemples ci-dessus (notamment le 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>) qu'il est bien plus simple d'utiliser la méthode lagrangienne que le PFD afin de déterminer les équations du mouvement. Ceci vient du fait que le lagrangien  $\mathcal{L} = T - V$  est une quantité *scalaire*, alors que le PDF  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  est une équation *vectorielle*.

Mise à part cette facilité calculatoire, on peut se demander s'il y a quelque chose de plus profond et fondamental dans le formalisme lagrangien. C'est en effet le cas, mais pour s'en rendre compte, il vous faudra attendre l'année prochaine !