Feuille d'exercices « calculs de base » n° 4
Intégrales curvilignes

On définit l'intégrale curviligne d'un champ de vecteur $\mathbf{v}$ d'un point $\mathbf{a}$ à un point $\mathbf{b}$ de l'espace comme

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l},$$

où $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$ est un vecteur infinitésimal[1] qui parcourt le chemin $\mathcal{C}$ de $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$, chemin qui est à spécifier afin d'évaluer l'intégrale [voir Fig. 1(a)]. Si le chemin $\mathcal{C}$ forme une boucle fermée, (c'est-à-dire, si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$), on note alors l'intégrale curviligne

$$\oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

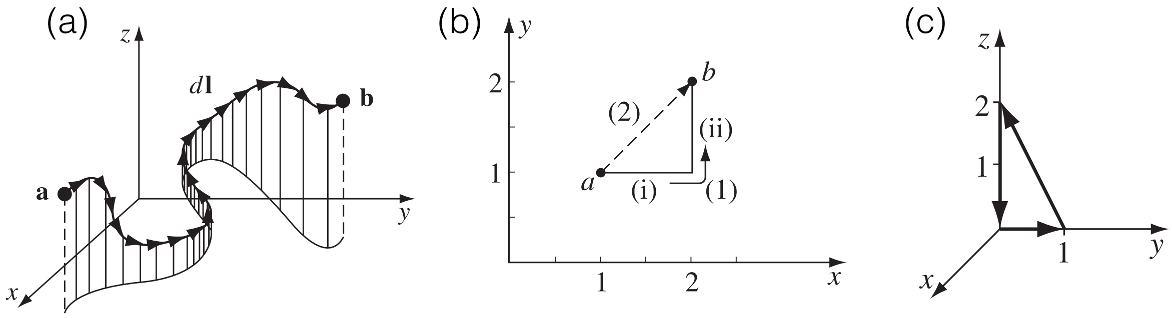

Figure 1

Exemple

Calculons l'intégrale curviligne du champ de vecteur $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}$ du point $\mathbf{a} = (1,1,0)$ au point $\mathbf{b} = (2,2,0)$ le long des chemins (1) et (2) représentés sur la Fig. 1(b). Calculons également l'intégrale $\oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ pour la boucle fermée qui emprunte d'abord le chemin (1) de $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$ puis retourne à $\mathbf{a}$ par le chemin (2).

Chemin (1)

Le chemin (1) consiste en deux parties.

- Pour la partie (i), on a $y = 1$ et $z = 0$ ($\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$), de sorte que $\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = (\hat{\mathbf{x}} + 4x\,\hat{\mathbf{y}})\cdot\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{d}x$, et donc
$$\int \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_1^2 \mathrm{d}x = 1.$$
- Pour la partie (ii), on a $x = 2$ et $z = 0$ ($\mathrm{d}x = \mathrm{d}z = 0$), de sorte que $\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = [y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 4(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}] \cdot \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} = 4(y+1)\mathrm{d}y$, et donc
$$\int \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)\mathrm{d}y = 10.$$

Le long du chemin (1), on a finalement

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 1 + 10 = 11.$$

1. Pour l'expression de $\mathrm{d}\mathbf{l}$ dans des systèmes de coordonnées autres que cartésiennes, se reporter au formulaire.

Chemin (2)

Pour le chemin (2), on a $x = y$ et $z = 0$ (et donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z = 0$), de sorte que $\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = [x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(x+1)\,\hat{\mathbf{y}}] \cdot (\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{y}}) = x^2\,\mathrm{d}x + 2x(x+1)\,\mathrm{d}x = (3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$. D'où

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = 10.$$

Notez que la stratégie est d'éliminer une variable en faveur de l'autre (ici y en faveur de x). On aurait bien sûr pu faire l'inverse.

Boucle fermée

Pour la boucle fermée qui emprunte d'abord le chemin (1) de **a** à **b** puis *retourne* à **a** par le chemin (2), on a

$$\oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 11 - 10 = 1.$$

Exercice 1

Calculez l'intégrale curviligne du champ de vecteur $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + y^2\,\hat{\mathbf{z}}$ de l'origine des coordonnées au point $(1, 1, 1)$ par les trois chemins suivants :

(a) $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$.

(b) $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$.

(c) Le chemin rectiligne direct.

Quelle est l'intégrale rectiligne de $\mathbf{v}$ selon le chemin fermé qui emprunte d'abord le chemin (a), et ensuite le chemin (b) ?

Exercice 2

Calculez l'intégrale curviligne du champ de vecteur $\mathbf{v} = 6\,\hat{\mathbf{x}} + yz^2\,\hat{\mathbf{y}} + (3y + z)\,\hat{\mathbf{z}}$ selon le chemin triangulaire fermé de la Fig. 1(c).