

TD 1 Flot sur une ligne

Exercice 1 : Points fixes et stabilité

Tracez les portraits de phase correspondant aux systèmes dynamiques du premier ordre suivants, et déterminez tous les points fixes, en évaluant leur stabilité. Tracez également quelques trajectoires pour différentes conditions initiales.

(a) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(b) $\dot{x} = x - \cos x$

(c) $\dot{x} = x - x^3$

Indication : Pour les cas (b) et (c), il est sans doute plus facile de tracer chaque partie du membre de droite de l'équation séparément, et de considérer lorsque les deux courbes intersectent.

Exercice 2 : Circuit RC

Considérons le circuit électrique de la Fig. 1 ci-dessous : une résistance R et une capacité C sont reliées en série à une source de tension continue V_0 . Supposons qu'à $t = 0$ le circuit soit fermé, et qu'il n'y ait pas initialement de charge électrique sur la capacité. Soit $Q(t)$ la charge portée par la capacité pour $t \geq 0$.

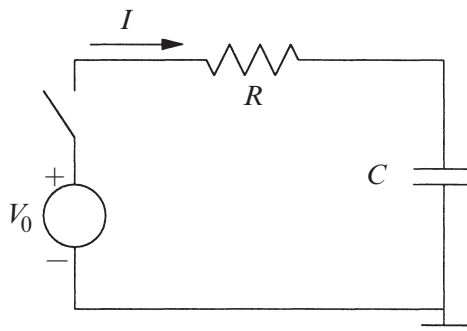


FIGURE 1 – © S.H. Strogatz

- (a) En considérant que la chute de tension dans le circuit doit être nulle, montrez que la dynamique de la charge $Q(t)$ est déterminée par l'équation

$$\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}. \quad (1)$$

- (b) Sans résoudre explicitement l'Eq. (1), mais en ayant recours à une méthode graphique, esquissez le graphe de Q en fonction du temps t .

Exercice 3 : Croissance d'une population (1)

Le modèle le plus simpliste pour décrire l'évolution temporelle d'une population est de supposer que la croissance de cette population est proportionnelle à son nombre d'individus $N(t)$: $\dot{N} = rN$, où r est le taux (constant) de croissance. Ce modèle conduit à une croissance exponentielle de la population : $N(t) = N_0 e^{rt}$.

Le modèle ci-dessus est clairement trop simpliste à temps long. En effet, cette surpopulation va nuire aux capacités de reproduction de l'espèce considérée, à cause des ressources en quantités limitées. Les démographes et biologistes des populations supposent donc que le taux de croissance

diminue lorsque N augmente. Le plus simple est de considérer une décroissance linéaire du type

$$\tilde{r}(N) = r \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad (2)$$

avec K la capacité porteuse du modèle, terme qui trouvera son sens dans la suite de l'exercice.

Les considérations ci-dessus conduisent alors à l'équation logistique (Verhulst, 1838)

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (3)$$

Cette équation peut être résolue analytiquement, mais dans la suite nous allons plutôt aborder le problème de façon graphique.

- (a) Tracez $\tilde{r}$ en fonction de N [cf. Eq. (2)] et discutez la courbe.
- (b) Tracez le portrait de phase associé à l'Eq. (3), déterminez les points fixes, et discutez de leur stabilité.
- (c) Esquissez $N(t)$ pour différentes populations initiales N_0 . Notez que quelque chose de qualitativement différent se passe selon que N_0 soit plus grand ou plus petit que $K/2$.

Exercice 4 : Croissance d'une population (2)

Discutez de la stabilité des points fixes de l'équation logistique (3) par analyse de stabilité linéaire, et déterminez le temps caractéristique dans chaque cas.

Exercice 5 : Analyse de stabilité linéaire

Utilisez l'analyse de stabilité linéaire pour classer les points fixes des systèmes dynamiques du premier ordre suivants :

- (a) $\dot{x} = x(1 - x)$
- (b) $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$
- (c) $\dot{x} = \tan x$
- (d) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

Exercice 6 : Potentiel

Pour chacun des systèmes dynamiques du premier ordre suivants, tracez le potentiel $V(x)$ associé et identifiez tous les points d'équilibre et leur stabilité :

- (a) $\dot{x} = x - x^3$
- (b) $\dot{x} = x(1 - x)$
- (c) $\dot{x} = 3$
- (d) $\dot{x} = \sin x$
- (e) $\dot{x} = -\sinh x$